

一种基于 δ 算子的自校正零极点配置无静差跟踪控制器

邓志 吴捷

(华南理工大学电力学院·广州, 510641)

摘要: 本文首先分析了当采样频率较高时, 基于 q 算子的自校正零极点配置无静差跟踪控制器所面临的问题. 在此基础上, 给出一种基于 δ 算子的算法, 给出了对比仿真结果. 结果显示, 在高速采样场合, 基于 δ 算子的算法具有更好的跟踪性能.

关键词: δ 算子; q 算子; 无静差跟踪; 零极点配置

1 引言

在一些领域, 例如精密仪表传动及高精度定位控制, 需要被控对象能准确无误地跟踪输入信号. 在无静差跟踪算法中, 一般采用内模原理, 即使误差传递函数的分子包含输入信号的极点. 本文所采用的方法是将内模原理与零极点配置方法结合起来.

在设计控制器时, 人们一般用 z 变换将连续系统离散化, 然后用移位算子 q 描述. 但随着计算机技术的飞速发展, 使得高速采样成为可能. 人们发现, 当采样频率增高时, 传统的移位算子描述方法存在以下难以避免的缺点: 1) 随着采样频率的增加, 离散模型的参数并不趋于连续系统的相应参数. 特别是当连续系统的相对阶数大于 1 时, 将有零点趋于单位圆或位于单位圆外^[1]. 2) 由于计算机字长有限, 采样频率的增加将导致舍入截尾误差增大, 从而有可能使控制系统出现极限环和不稳定状态^[2].

为避免出现上述情况, 有些人建议降低采样频率. 但是, 采样频率过低会使得控制系统长时间处于开环状态, 采样输出不足以表示系统的连续响应, 易失控; 另外, 还使得控制输入信号序列波动较大, 降低控制性能.

为克服以上缺点, 国外学者 Goodwin 等人在一些控制领域用 δ 算子取代 q 算子, 取得了较好的结果^[3]. 基于 δ 算子的实现方法主要有以下两大优点: 1) 随着采样间隔趋于零, 用 δ 算子描述的离散系统参数收敛于相应的连续系统参数^[3]. 2) 具有很好的数值特性. 在相同字长条件下, 具有更好的系数表达精度, 且产生极限环振荡的可能性较小^[2].

本文将 δ 算子实现方法引入零极点配置无静差跟踪算法中. 仿真结果显示, 在有噪声情况下, 基于 δ 算子的控制系统明显优于基于 q 算子的控制系统. 本文只给出基于 δ 算子的算法, 至于基于 q 算子的算法, 读者可参看文献[4].

2 基于 δ 算子的离散系统描述

设一个单输入单输出连续系统可用下面的拉氏变换模型表示

$$A(s)y(s) = B(s)u(s). \quad (1)$$

式中 $u(s)$ 是控制输入, $y(s)$ 是输出. 且

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0, \quad B(s) = b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0.$$

对(1)式进行 z 变换, 可得到由 q 算子描述的离散系统

$$A_q(q)y(k) = B_q(q)u(k). \quad (2)$$

前面我们提到,随着采样间隔趋于零,由(2)式表示的离散系统参数并不趋于由(1)式表示的连续系统.为克服这一缺点,我们用下面所定义的 δ 算子代替 q 算子

$$\delta = \frac{q-1}{T}. \quad (3)$$

式中, T 为采样时间.将其代入(2)式中,可得到由 δ 算子描述的离散系统模型

$$A_\delta(\delta)y(k) = B_\delta(\delta)u(k). \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} A_\delta(\delta) &= \delta^n + \tilde{a}_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_0, \\ B_\delta(\delta) &= \tilde{b}_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + \tilde{b}_{m+1}\delta^{m+1} + \tilde{b}_m\delta^m + \cdots + \tilde{b}_0. \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} A_\delta(\delta^{-1})y(k) &= B_\delta(\delta^{-1})u(k), \\ A_\delta(\delta^{-1}) &= 1 + \tilde{a}_{n-1}\delta^{-1} + \cdots + \tilde{a}_0\delta^{-n}, \\ B_\delta(\delta^{-1}) &= \tilde{b}_{n-1}\delta^{-1} + \cdots + \tilde{b}_{m+1}\delta^{m+1-n} + \tilde{b}_m\delta^{m-n} + \cdots + \tilde{b}_0\delta^{-n}. \end{aligned} \quad (5)$$

随着 T 趋于零,由(5)式表示的离散模型有如下的性质^[3]

$$\tilde{a}_i \rightarrow a_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad \tilde{b}_j \rightarrow 0, \quad j = m+1, \dots, n-1; \quad \tilde{b}_i \rightarrow b_i, \quad i = 0, \dots, m.$$

因此,只要 T 足够小,我们可以用下述离散模型表示相应的连续系统

$$A_\delta(\delta^{-1})y(k) = B_{r\delta}(\delta^{-1})u(k), \quad B_{r\delta}(\delta^{-1}) = \tilde{b}_m\delta^{m-n} + \cdots + \tilde{b}_0\delta^{-n}. \quad (6)$$

仿真结果表明,基于该模型的控制系统稳定,并有较好的控制性能.因此,对于相对阶数大于 1 的连续系统,只要该连续系统的零点阻尼较好,且采样时间足够小,在设计控制器时,就可以消去该零点;并且不会象用 q 算子描述的离散系统那样会额外出现不稳定的零点.

3 基于 δ 算子的无静差跟踪控制器的设计

图 1 是该控制系统的结构框图.图中 H 是被控对象传递函数, H_c 是控制器传递函数, $w(t)$ 是噪声.由图 1 可得系统闭环传递函数

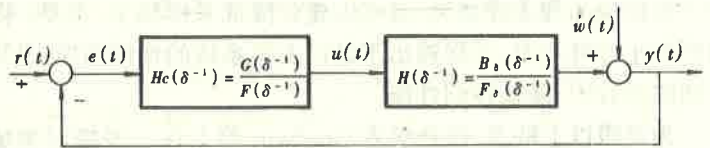


图 1 控制系统的结构框图

$$H_0(\delta^{-1}) = \frac{B_\delta(\delta^{-1})G(\delta^{-1})}{A_\delta(\delta^{-1})F(\delta^{-1}) + B_\delta(\delta^{-1})G(\delta^{-1})}. \quad (7)$$

由于采样频率较高时,可以用 $B_{r\delta}(\delta^{-1})$ 代替 $B_\delta(\delta^{-1})$.因此,式中 $F(\delta^{-1})$, $G(\delta^{-1})$ 的系数可通过求解下面的 Diophantine 方程得到

$$A_\delta(\delta^{-1})F(\delta^{-1}) + B_{r\delta}(\delta^{-1})G(\delta^{-1}) = A_m(\delta^{-1})A_0(\delta^{-1}). \quad (8)$$

式中 $A_m(\delta^{-1})$ 是希望的闭环特征方程 $A_0(\delta^{-1})$ 是观测器方程.观测器应有较快的动态衰减特性.

由图 1 还可得到系统的误差传递函数

$$\frac{e(\delta^{-1})}{r(\delta^{-1})} = \frac{A_\delta(\delta^{-1})F(\delta^{-1})}{A_\delta(\delta^{-1})F(\delta^{-1}) + B_\delta(\delta^{-1})G(\delta^{-1})}. \quad (9)$$

显然,若误差传递函数的零点能包含被跟踪信号的模态,则这些模态将不会出现在误差信号中,这样,对给定的输入信号,可以实现无静差跟踪.

若

$$r(\delta^{-1}) = \frac{\varphi(\delta^{-1})}{\lambda(\delta^{-1})} \quad (10)$$

且, 我们把 $B_{r\delta}(\delta^{-1})$ 分解为

$$B_{r\delta}(\delta^{-1}) = B^+(\delta^{-1})B^-(\delta^{-1}). \quad (11)$$

式中 B^+ 是稳定多项式, B^- 的零点都是不稳定或阻尼较差的零点, 且 B^+ 是首一多项式. 若系统所有的零点都稳定且阻尼较好, 则 $B^-(\delta^{-1}) = \tilde{B}_m \delta^{m-n}$. 因此可令

$$F(\delta^{-1}) = F^*(\delta^{-1})B^+(\delta^{-1})\lambda(\delta^{-1}). \quad (12)$$

其中, $F^*(\delta^{-1})$ 及 $G(\delta^{-1})$ 的系数可由解下面的 Diophantine 方程得到

$$A_\delta(\delta^{-1})F^*(\delta^{-1})\lambda(\delta^{-1}) + B^-(\delta^{-1})G(\delta^{-1}) = A_m(\delta^{-1})A_0(\delta^{-1}). \quad (13)$$

如果连续系统的所有零点都稳定且阻尼较好, 则可以消去所有零点. 这样, 解该方程就相当于解一个简单的三角形线性方程组. 而只要连续系统的相对阶数大于 1, 由 q 算子描述的离散模型将有零点随采样频率增高而趋于单位圆或位于单位圆外. 因此, 不能随便消去零点, 这使得算法变得复杂.

为使系统阶数不至于太高, $F^*(\delta^{-1})$ 及 $G(\delta^{-1})$ 的阶数因尽可能的小.

若被控对象的参数未知, 我们可用递推最小二乘算法按下面估计模型求得 $\hat{\theta}$ 或 \hat{A}_δ 和 \hat{B}_δ

$$A_\delta(\delta^{-1})y(k) = B_\delta(\delta^{-1})u(k).$$

或

$$y(k) = \Psi^T(k)\theta.$$

式中

$$\begin{aligned} \Psi^T(k) &= [-\delta^{-1}y(k), \dots, -\delta^{-n}y(k), \delta^{-1}u(k), \dots, \delta^{-n}u(k)], \\ \theta &= [a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0]. \end{aligned}$$

其中 δ^{-1} 算子的运算规则为

$$\begin{aligned} \delta^{-1}x(k) &= Tx(k-1) + \delta^{-1}x(k-1), \quad x(k) = y(k), u(k), r(k), \\ \delta^{-i}x(k) &= \delta^{-1}(\delta^{-(i-1)}x(k)). \end{aligned}$$

然后, 忽略 \hat{B}_δ 中随采样频率增加而趋于零的项, 从而得到 $\hat{B}_{r\delta}$. 这样, 我们就得到了下面基于 δ 算子的无静差跟踪算法:

已知: 希望的闭环特征方程 $A_m(\delta^{-1})$, 观测器方程 $A_0(\delta^{-1})$, 被跟踪信号 $r(t)$.

第一步 获得实测输出 $y(k)$, 组成 $\Psi(k)$, 用递推最小二乘算法得到 $A_\delta, B_{r\delta}$ 的估计值 $\hat{A}_\delta, \hat{B}_{r\delta}$.

第二步 用 $\hat{A}_\delta, \hat{B}_{r\delta}$ 代替 $A_\delta, B_{r\delta}$, 由 (12), (13) 式求得 $F(\delta^{-1}), G(\delta^{-1})$.

第三步 计算控制信号: $u(k) = [r(k) - y(k)] \frac{G(\delta^{-1})}{F(\delta^{-1})}$.

在每个采样周期重复这三步.

4 仿真与讨论

本节给出了基于 δ 算子和基于 q 算子控制系统的对比仿真结果. 我们选择的被控对象可由下面的传递函数表示

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}.$$

采样时间 $T=0.05$ 秒, 希望的特征方程 $A_m(q^{-1}) = (1-0.7q^{-1})^2$, 观测器方程 $A_0(q^{-1}) = (1-0.52q^{-1})^3$. 相应可得到 $A_m(\delta^{-1}) = (1+0.3\delta^{-1}/T)^2$, $A_0(\delta^{-1}) = (1+0.48\delta^{-1}/T)^3$. 噪声

是方差为 0.02 的白噪声. 由于在 q 算子描述的离散模型中, 有零点趋于单位圆, 在设计相应控制器时, 没有消去零点.

图 2, 图 3 分别是输入信号为阶跃信号, 衰减正弦信号($r(t) = e^{-0.2t} \sin 2.8t$)的输出波形对比仿真图.

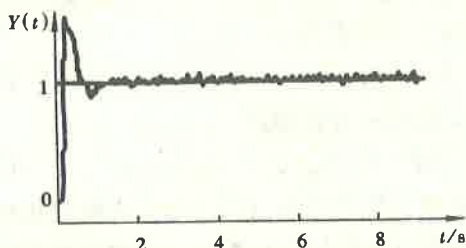


图 2(a) δ 算子系统的输出波形

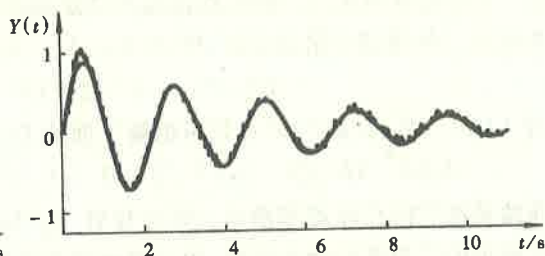


图 3(a) δ 算子系统的输出波形

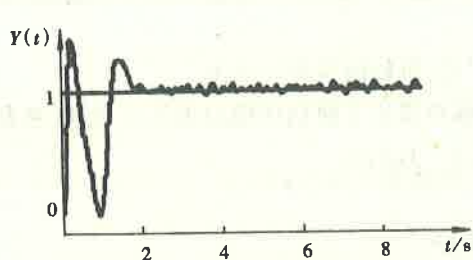


图 2(b) q 算子系统的输出波形

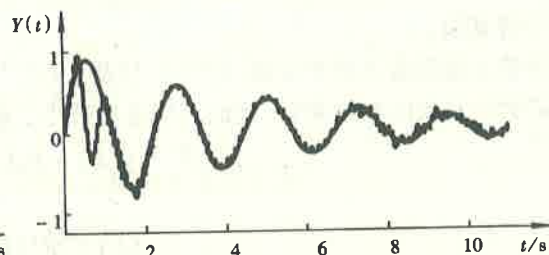


图 3(b) q 算子系统的输出波形

从图 2, 图 3 可以看出, 在基于 q 算子的控制系统中, 被控对象往往不能很快地跟踪输入信号, 得经历一段较长时间的剧烈振荡期后才能进入跟踪状态; 另外, 若采样频率较高, 噪声较大, 在跟踪过程中易出现振荡现象, 甚至失控, 发散. 而在基于 δ 算子的控制系统中, 被控对象能较快地进入跟踪状态, 跟踪性能比较好且稳定.

5 结 论

上述两种算法的主要区别在于离散系统描述及算子运算规则. 由仿真结果可以看出, 基于 δ 算子的算法有更好的数值特性和稳定性; 另外, 随着采样频率的增加, 由 δ 算子描述的离散系统参数趋于相应的连续系统参数. 因而, 当连续系统相对阶数大于 1 时, 不必象基于 q 算子的控制系统那样必须考虑对象零点变得不稳定的问题, 这样可使算法得到简化. 当然, 若连续系统是非最小相的, 在设计时应保留不稳定的零点.

由本文第 2 节可以看出, 基于 δ 算子的控制算法一般只适用于高速采样场合. 若采样频率过低, 会使得相应离散模型具有较大的模型误差, 从而降低控制性能. 另外, 在实际应用中, 实现高速采样将增加硬件费用. 因此, 应综合考虑性能与价格的关系, 以获得最佳性能价格比.

总之, 基于 δ 算子与基于 q 算子的控制器是互补的关系, 前者适用于高速采样场合, 后者适用于低速采样场合.

参 考 文 献

- 1 Astrom, K. J., Hagander, P. and Sternby, J. . Zeros of sampled. *Automatica*, 1984, 20(1): 31 - 38
- 2 陈宗基, 高金源, 张建贵. Z 变换和 Δ 变换的有限字长特性研究. *自动化学报*, 1992, 18(6): 662 - 669
- 3 Goodwin, G. C., Lozano-Leal, R. Mayne, D. Q. and Middleton, R. H. . Rapprochement between continuous and discrete model

reference adaptive control. Automatica, 1986, 22(2): 199 - 207

- 4 Puthenpura, S. C. and MacGregor, J. F. . Pole-zero placement conrollers and self-tuning regulators with better set point tracking. IEE Proceeding, 1987, 134, Pt. D(1): 26 - 30
- 5 吴捷. 计算机控制系统. 广州: 广东科技出版社, 1995
- 6 金井喜雄美等. 计算机控制系统入门—— δ 算子的应用. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1996

Pole-Zero Placement Controllers and Self-Tuning Regulators with Better Set-Point Tracking Using δ -Operator

DEN Zhi and WU Jie

(Electric Power College, South China University of Technology, Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: The problem of pole-zero placement controllers and self-tuning regulators with better set-point tracking is considered in the case of high-speed sampling rate. A new algorithm with δ -operator models is proposed. The δ -operator models have close connections with the original continuous-time versions. The new controller is compared with its digital counterpart, which is usually based on shift operator. Simulation results show the superiority of the δ -operator based algorithm over the one in the z -plane.

Key words: δ -operator; q -operator; tracking without steady-state error; pole-zero placement

本文作者简介

邓志 1969年生. 现为华南理工大学电力学院硕士研究生. 主要研究方向为自适应控制与电力系统控制.

吴捷 1937年生. 教授, 博士生导师. 华南理工大学电力学院院长; 主要研究方向: 自适应控制, 自组织控制, 电力系统自动化.

