第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

连续时变不确定系统约束方差/H_∞鲁棒状态滤波*

朱纪洪
(南京航空航天大学自动控制系·南京, 210016)

郭 治
(南京理工大学自动控制系·南京, 210094)

摘要: 基于上限方差配置的混合方差/H_∞设计方法可得到满意的设计结果. 本文用一个修正的 Riccati 方程研究了一类时变不确定系统的混合方差/H_∞状态滤波器, 导出了滤波器的一般公式. 对所允许的扰动由该公式所确定的滤波器可使稳态滤波误差方差上限及误差系统的 H_∞ 指标均小于指定值, 因而具有较好的鲁棒性.

关键词: 时变不确定系统; 方差配置; H_∞滤波

1 引 言

由于混合 H_2/H_∞设计方法能在设计过程中兼顾系统的 H_2 与 H_∞指标, 得到高品质的控制器或滤波器, 因此, 近年来人们对混合 H_2/H_∞ 问题进行了大量的研究, 出现了许多研究成果[1~3]. 其中[2,3]研究了线性定常系统的混合 H_2/H_∞ 状态滤波问题. 本文利用协方差配置理论[4]对时变不确定系统讨论了混合方差/H_∞滤波问题, 和标准 H_2/H_∞ 问题的区别在于: 在满足 H_∞ 指标的前提下, 不追求系统的 H_2 指标最优, 而只要求系统的协方差或方差小于指定上限. 这样处理的原因首先在于方差或其上限作为性能指标与 H_2 指标相比物理意义明确、直观, 更接近工程实际; 其次是 H_2 指标作为标量目标函数, 当其最优时并不一定能使每个状态的滤波误差方差均满足要求, 即使这样的滤波器存在, 却不一定能通过调整加权阵得到.

2 问题描述

考虑如下时变不确定随机系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + Bw(t), \quad x(0) = 0, \tag{2.1}$$

$$y(t) = (C + \Delta C(t))x(t) + Dw(t), \tag{2.2}$$

$$z(t) = Mx(t). \tag{2.3}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$为系统状态, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$为测量输出, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$为状态的线性组合, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$为外界干扰; $\Delta A(t), \Delta C(t)$分别代表系统矩阵与测量矩阵中的时变不确定部分.

假设 2.1

$$\begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ \Delta C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} F(t) H. \tag{2.4}$$

其中 G_1, G_2, H 为定常矩阵, $F(t)$为时变不确定矩阵, 且

$$F(t) \in \mathscr{F} \triangleq \{F(t) \mid \sigma_{\max}[F(t)] \leqslant 1, \ \forall t\}. \tag{2.5}$$

假设 2.2 在讨论滤波器方差性能时, 认为 $w(t)$ 是零均值单位白噪声过程; 在讨论 H_∞ 指标时, 认为 $w(t) \in L_2[0,\infty)$, 且 $w(t) \neq 0$, 这里 $L_2[0,\infty)$ 代表$[0,\infty)$上的平方可积函数空间.

考虑滤波公式

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + Ky(t), \quad \hat{x}(0) = 0, \tag{2.6}$$

---

* 中国博士后科学基金资助项目.

本文于 1995 年 4 月 4 日收到. 1995 年 12 月 27 日收到修改稿.

$$\hat{z}(t) = M\hat{x}(t). \tag{2.7}$$

要求确定公式中的参数阵 $\hat{A}$ 和 K,使滤波误差

$$e(t) \triangleq x(t) - \hat{x}(t),\quad e_z \triangleq z(t) - \hat{z}(t) = Me(t) \tag{2.8}$$

满足 1) $\mathrm{var}[e_i(\infty)] \leqslant \sigma_i^2,\ i = 1,2,\cdots,n_x$; 2) $\| e_z(\infty) \|_2 \leqslant \gamma \| w(t) \|_2$. 式中 $\mathrm{var}[e_i(\infty)]$ 表示第 i 个状态的稳态滤波误差方差.

3 主要结果

记 $x_e \triangleq \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$, $A_e \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - \hat{A} - KC & \hat{A} \end{bmatrix}$, $B_e \triangleq \begin{bmatrix} B \\ B - KD \end{bmatrix}$,

$G_e \triangleq \begin{bmatrix} G_1 \\ G_1 - KG_2 \end{bmatrix}$, $H_e \triangleq [H \quad 0]$, $\Delta A_e(t) \triangleq G_e F(t) H_e$, $M_e \triangleq [0 \quad M]$.

则有增广系统为

$$\dot{x}_e(t) = [A_e + \Delta A_e(t)] x_e(t) + B_e w(t), \tag{3.1}$$

$$e_z(t) = M_e x_e(t). \tag{3.2}$$

定理 3.1 设 $T(s) = M[sI - (A + \Delta A(t))]^{-1} B$, $a > 0$, $Q_0 = Q_0^{\mathrm{T}} > 0$, 如果 Riccati 方程

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + \frac{QM^{\mathrm{T}}MQ}{\gamma^2} + \frac{QH^{\mathrm{T}}HQ}{\alpha} + \alpha G_1 G_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + Q_0 = 0 \tag{3.3}$$

存在对称正定解 Q,那么

1) 对所有符合假设 2.1 条件的 $\Delta A(t)$,时变不确定系统(2.1)二次稳定;

2) $X \leqslant Q$, $X \triangleq \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}[x(t) \cdot x^{\mathrm{T}}(t)]$ 为系统(2.1)的稳态状态协方差;

3) $\| T(s) \|_\infty \leqslant \gamma$, 其中 $\| T(s) \|_\infty \triangleq \sup\limits_{0 \neq w(t) \in L_2[0\ \infty)} \dfrac{\| z(t) \|_2}{\| w(t) \|_2} = \sup\limits_{w \in \mathbb{R}} \sigma_{\max}[T(jw)]$ 为噪声抑制系数.

定理 3.2 如果存在 $\alpha > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ 和矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$, 使

1) Riccati 方程

$$AQ_1 + Q_1 A^{\mathrm{T}} + \frac{Q_1 H^{\mathrm{T}} H Q_1}{\alpha} + \alpha G_1 G_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + \varepsilon_1 I = 0, \tag{3.4}$$

存在正定解 Q_1;

2) Riccati 方程

$$\tilde{A} Q_2 + Q_2 \tilde{A}^{\mathrm{T}} + \frac{Q_2 M^{\mathrm{T}} M Q_2}{\gamma^2} - (Q_2 \tilde{C}^{\mathrm{T}} + \alpha G_1 G_2^{\mathrm{T}} + BD^{\mathrm{T}}) R^{-1} \cdot (\tilde{C} Q_2 + \alpha G_2 G_1^{\mathrm{T}} + DB^{\mathrm{T}}) + \alpha G_1 G_1^{\mathrm{T}} + BB^{\mathrm{T}} + LL^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 I = 0. \tag{3.5}$$

式中

$$\tilde{A} \triangleq A + (BB^{\mathrm{T}} + \alpha G_1 G_1^{\mathrm{T}}) Q_1^{-1},$$
$$\tilde{C} \triangleq C + (DB^{\mathrm{T}} + \alpha G_2 G_1^{\mathrm{T}}) Q_1^{-1},$$
$$R \triangleq DD^{\mathrm{T}} + \alpha G_2 G_2^{\mathrm{T}}.$$

存在对称正定解 Q_2. 那么由

$$K = (Q_2 \tilde{C}^{\mathrm{T}} + \alpha G_1 G_2^{\mathrm{T}} + BD^{\mathrm{T}}) R^{-1} + LUR^{-1/2},\quad U \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y} \text{为任意正交矩阵}, \tag{3.6a}$$

$$\hat{A} = \tilde{A} - K\tilde{C} \tag{3.6b}$$

所确定的滤波器(2.6)使 1) 增广系统(3.1)二次稳定;2) 稳定滤波误差协方差 $X_e \leqslant Q_2$;

3) $$\| e_z(t) \|_2 \leqslant \gamma \| w(t) \|_2.$$

证　令 $Q_e=\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix}>0$，则不难验证

$$A_eQ_e+Q_eA_e^{\mathrm T}+\frac{Q_eM_e^{\mathrm T}M_eQ_e}{\gamma^2}+\frac{Q_eH_e^{\mathrm T}H_eQ_e}{\alpha}+\alpha G_eG_e^{\mathrm T}+B_eB_e^{\mathrm T}=\begin{bmatrix}-\varepsilon_1 I & 0\\ 0 & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix}.$$

根据定理 3.1，结论显然．

说明 3.3　若 A 为稳定矩阵，且 $\|H(sI-A)^{-1}G_1\|_\infty<1$，即如果不确定系统(2.1)二次稳定，则 Riccati 方程(3.4)存在对称正定解．

定义 3.4　设 $Q_2\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ 为给定的对称正定阵，满足 $[Q_2]_{ii}\leqslant\sigma_i^2,\ i=1,2,\cdots,n_x$，若存在 $\alpha>0$，$\varepsilon_2>0$ 和矩阵 $L\in\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$ 使得 Q_2 为方程(3.5)的解，则称 Q_2 为 $\sigma-\gamma$- 可配置．

说明 3.5　根据定理 3.2 及定义 3.4 可以看出如果能构造出 $\sigma-\gamma$- 可配置阵 Q_2，那么由式(3.6)所确定的滤波器的稳态滤波误差协方差不超过 Q_2，即 Q_2 是稳态滤波误差协方差的上限，并且从噪声到滤波误差传递函数阵的 H_∞ 范数不大于 γ．

定理 3.6　存在矩阵 $L\in\mathbb{R}^{n_x\times n_y}$，使对称正定阵 Q_2 为 Riccati 方程(3.5)解的充要条件是

$$\Xi\triangleq\tilde{A}Q_2+Q_2\tilde{A}^{\mathrm T}+\frac{Q_2M^{\mathrm T}MQ_2}{\gamma^2}-(Q_2\tilde{C}^{\mathrm T}+\alpha G_1G_2^{\mathrm T}+BD^{\mathrm T})R^{-1}(\tilde{C}Q_2+\alpha G_2G_1^{\mathrm T}+DB^{\mathrm T})$$
$$+\alpha G_1G_1^{\mathrm T}+BB^{\mathrm T}+\varepsilon_2 I\leqslant 0\ \text{且}\ \mathrm{rank}[\Xi]\leqslant n_y. \tag{3.7}$$

说明 3.7　如果对 Q_2 的对角元素(稳态误差方差上限)不作约束，那么所得结果就是连续不确定系统的 H_∞ 滤波公式；如果令 $\gamma\to\infty$，则所得结果就是连续不确定系统指定方差配置的状态滤波公式．

4　数值举例

考虑如下时变不确定线性随机系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.5 & -2\\ 0.1\sin(\sigma(t)) & -3+0.2\sin(\sigma(t))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1(t)\\ w_2(t)\end{bmatrix},$$

$$y(t)=[1+0.1\sin(\sigma(t))\quad 0.2\sin(\sigma(t))]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+[1\quad 0]\begin{bmatrix}w_1(t)\\ w_2(t)\end{bmatrix},$$

$$z(t)=[1\quad 0]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

其中 $\sigma(t)$ 为时变不确定函数，干扰 $w(t)$ 满足假设 2.2．要求确定滤波公式(2.6)中的参数阵 $\bar{A}$ 和 K，使状态滤波误差方差满足 $\mathrm{var}[e_1(\infty)]\leqslant 0.64$，$\mathrm{var}[e_2(\infty)]\leqslant 0.90$；且滤波器的噪声抑制系数不大于 0.8．

解　系统不确定项可表示如下

$$\Delta A=\begin{bmatrix}0\\ 0.1\end{bmatrix}\sin(\sigma(t))[1\quad 2],\quad \Delta C=0.1\sin(\sigma(t))[1\quad 2].$$

取 $\alpha=1.5$，$\varepsilon_1=2.0$，并把相关参数代入方程(3.4)可求得其对称正定解

$$Q_1=\begin{bmatrix}1.5000 & 0.0000\\ 0.0000 & 0.7576\end{bmatrix}.\ \text{于是}\ \tilde{A}=\begin{bmatrix}-0.8333 & -2.0000\\ 0.0000 & -1.6602\end{bmatrix},\ \tilde{C}=[1.6667\quad 0.0198],$$

$R=[1.0150]$，令 $Q_2=\begin{bmatrix}0.64 & x\\ x & 0.90\end{bmatrix}$．其中 x 是待定参数，根据条件(3.7)，在取 $\varepsilon_2=2.0$ 时可构造出可配置阵 $Q_2=\begin{bmatrix}0.6400 & 0.3575\\ 0.3575 & 0.9000\end{bmatrix}$，从式(3.7)得到 $L=[0.4194\quad 0.2932]^{\mathrm T}$．

取 $U=[1]$可得 $K_1=\begin{bmatrix}2.4454\\-0.2637\end{bmatrix}$; $\hat{A}_1=\begin{bmatrix}-4.9090 & -2.0484\\0.4395 & -1.6550\end{bmatrix}$.

取 $U=[-1]$可得 $K_2=\begin{bmatrix}1.6129\\-0.8458\end{bmatrix}$; $\hat{A}_2=\begin{bmatrix}-3.5215 & -2.0319\\1.4095 & -1.6435\end{bmatrix}$.

在实际应用时,可根据需要选取其中之一.总之,本文对一类时变不确定系统给出了一种参数化的状态滤波公式,其中的自由参数 U 给进一步优化其它指标带来了可能.

参考文献

1 Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. and Francis, B.A.. State-space solution to standard H_2 and H_∞ control problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(8): 831-847

2 Berstein, D.S. and Haddad, W.M.. Steady-state Kalman filtering with an H_∞ error bound. Systems Contr. Lett., 1989, 12:9-16

3 Haddad, W.M., Berstein, D.S. and Mustafa, D.. Mixed-norm H_2/H_∞ regulation and estimation: The discrete-time case. Systems Contrl Lett., 1991, 16:235-247

4 Yaz, E. nad Skelton, R.E., Continuous and discrete state estimation with error covariance assignment, Proc. 30th IEEE CDC, 1991, 3091-3092

5 Khargonekar, P.P., Peterson, I.R. and Zhou, K.. Robust stabilization of uncertain linear system: quadratic stability and H_∞ control theory. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(3):356-361

Mixed Variance/H_∞ State Filtering for Continuous Time-Varying Uncertain System

ZHU Jihong

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics·Nanjing, 210016, PRC)

GUO zhi

(Department of Automatic Control, Nanjing University of Science and Technology·Nanjing, 210094, PRC)

Abstract: Satisfied design results can be obtained by mixed variance/H_∞ methed based on upper covariance assignment. A mixed variance/H_∞ filter is discussed in the paper by a modified Riccati equation, and the filtering formulas are derived. The filter can guarantee that both filtering error variance upper bounds and H_∞ norm be less than specified values respectively for all admissible uncertainty, and therefore it has perfect robustness.

Key words: time-varying uncertain system; variance assignment; H_∞ state filtering

本文作者简介

朱纪洪 1968年生.1990在江苏理工大学获工学学士学位,1995年6月于南京理工大学获工学博士学位并留校任教,1996年在南京航空航天大学从事博士后研究.目前研究领域:不确定系统多目标鲁棒控制,协方差配置,H_∞控制以及无人飞机飞行控制系统等.

郭 治 1937年生.1961年毕业于哈尔滨军事工程学院,现为国务院学位委员会学科评议组成员,中国兵工学会理事,南京理工大学自控系教授,博士生导师.长期从事控制理论及应用技术的教学与研究工作.目前主要研究领域为滤波与随机控制及兵器火力控制.