二阶惯性系统DMC预测控制的闭环分析

谢永斌　罗　忠　冯祖仁　胡保生

(西安交通大学系统工程研究所·西安,710049)

摘要:文中研究了一类二阶系统DMC预测控制的闭环稳定性,并定量地推导出增益失配界,为设计此类控制系统提供了一定的理论依据.

关键词:稳定多项式;增益失配界;闭环稳定性;DMC预测控制

1 引　言

自70年代开始的预测控制领域的研究已取得了较大的进展,然而该算法在理论分析方面均不够深入,给系统定量设计及算法的推广带来了一定的困难.本文在[1]的基础上,研究了一类二阶惯性系统,给出了开环稳定性的理论证明及闭环增益失配界的定量表达式,为二阶系统的DMC预测控制设计提供了一定的理论依据.

2 二阶惯性系统DMC预测控制

为集中讨论闭环性质,这里只考虑定值控制.依据文献[1],DMC预测控制的内模结构如图1.

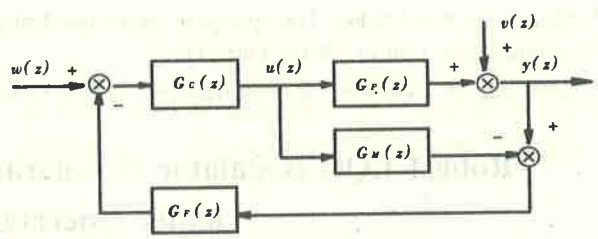

图1　DMC预测控制的内模结构

$G_C(z)$为控制器,$G_F(z)$为滤波器,$G_P(z)$为过程模型,$G_M(z)$ 预测模型.当模型长度取得充分大,$G_C(z)$有其相应的最小化形式.

不难分析,当$G_P(z)=G_M(z)$时,图1所示系统的闭环稳定性取决于$G_C(z)$,$G_P(z)$是否同时稳定.当$G_P(z)\neq G_M(z)$时,系统的闭环稳定性取决于

$$1+G_C(z)G_F(z)[G_P(z)-G_M(z)]$$

的零点多项式是否为稳定的多项式.

不失一般性,考虑如下二阶惯性加纯滞后的环节

$$G(s)=\frac{e^{-\tau s}(\tau_3 s+1)}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)},\quad (\tau_1\geqslant\tau_2\geqslant 0,\ \tau\geqslant 0,\ \tau_3\geqslant 0). \tag{2.1}$$

取采样周期为T,且设τ为T的整数倍,即$\tau=lT$,在对象(2.1)前接一零阶保持器后,其z传递函数为

$$G_M(s)=\frac{z^{-(l+1)}(t_1+t_2z^{-l})}{1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}}. \tag{2.2}$$

其中

$$t_1=1-k_1\delta_1+k_2\delta_2,\quad t_2=\delta_1\delta_2+k_2\delta_1-k_1\delta_2,$$

$$p_1=-(\delta_1+\delta_2),\quad p_2=\delta_1\delta_2,$$

$$k_1=\frac{\tau_1-\tau_3}{\tau_1-\tau_2},\quad k_2=\frac{\tau_2-\tau_3}{\tau_1-\tau_2},$$

本文于1995年4月20日收到.1996年7月15日收到修改稿.

$$\delta_1 = \exp(-\frac{T}{\tau_1}), \quad \delta_2 = \exp(-\frac{T}{\tau_2}).$$

在不影响结论的正确推导下,记系统(2.1)的阶跃响应最初 l 拍输出均为 $a_0(a_0=0)$,则系统的阶跃响应系数为

$$a_i = 1 - k_1\delta_1^i + k_2\delta_2^i, \quad (i = 0, 1, \cdots). \tag{2.3}$$

依据文献[1],在 DMC 算法中,采用优化时域为 $P+l$,控制时域为 $M=1$,控制权矩阵 $R=0$,误差权矩阵取为

$$Q = \begin{bmatrix} 0_{l\times l} & 0 \\ 0 & I_{P\times P} \end{bmatrix}.$$

则对象(2.2)在无滞后部分求出的 DMC 控制器的最小化形式为

$$G_C(z) = \frac{d_s(1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2})}{1 + m_1 z^{-1} + m_2 z^{-2}}. \tag{2.4}$$

其中

$$d_s = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{P} a_i, \quad S = \sum_{i=1}^{P} a_i^2,$$

$$m_1 = b_2 - b_1 + p_1, \quad m_2 = b_3 - b_2 + (b_2 - b_1)p_1 + p_2,$$

$$b_j = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{P} a_i a_{i+j-1}, \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

a_i 为(2.3)中的对象阶跃响应系数.

若选择滤波器的形式为

$$G_F(z) = \frac{h}{1 - (1-h)z^{-1}}, \quad (0 < h \leqslant 1),$$

并设实际控制对象模型为 $G_P(z) = (1+k)G_M(z)$,k 为增益失配系数,那么在 $k=0$ 时,只要 $G_C(z)$ 稳定,则闭环系统就是稳定的,当 $k\neq 0$ 时,只要 $P_C(z)$ 是稳定多项式,则闭环系统就是稳定的. 其中

$$P_C(z) = (z^2 + m_1 z + m_2)(z - 1 + h)z^{l-1} + d_s hk(t_1 z + t_2). \tag{2.5}$$

3　预备知识

引理 1[2](儒歇定理)　如果函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在简单闭曲线 C 及 C 的内部解析,且在 C 上

$$f(z) \neq 0, \quad |f(z)| > |g(z)|,$$

那么在 C 的内部,$f(z)$ 与 $f(z)+g(z)$ 有相同的零点个数.

推论 1　假设 $f(z)$ 为稳定多项式,$g(z)$ 为阶次不高于 $f(z)$ 的多项式,若

$$|k| < \min_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|,$$

则 $z^n f(z) + kg(z)$ 为稳定多项式($n = 0, 1, 2, \cdots$).

由引理 1 即可推得,证明略.

在 2 中定义的二阶惯性系统 DMC 控制中,有如下关系:

0)　$t_1 = a_1 > 0,$　(3.0)

1)　$a_{i+1} > a_i \geqslant 0, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$　(3.1)

2)　$a_{i+2} + p_1 a_{i+1} + p_2 a_i = 1 + p_1 + p_2 = t_1 + t_2 > 0, \quad (i = 0, 1, 2, \cdots),$　(3.2)

3) $$d_s=\frac{1+m_1+m_2}{t_1+t_2}, \tag{3.3}$$

4) $$0\leqslant m_2<\delta_1\delta_2<1, \quad (P=1,2,\cdots), \tag{3.4}$$

5) $$t_1+t_2<1+m_1+m_2\leqslant 1+\frac{t_2}{t_1}, \quad (P=1,2,\cdots), \tag{3.5}$$

6) $$-\delta_1-\delta_2<m_1\leqslant\frac{t_2}{t_1}, \quad (P=1,2,\cdots), \tag{3.6}$$

7) $$1-m_1+m_2\geqslant 1-\frac{t_2}{t_1}, \quad (P=1,2,\cdots), \tag{3.7}$$

8) $$\frac{1-m_1+m_2}{1+m_1+m_2}\geqslant\frac{t_1-t_2}{t_1+t_2}, \quad (t_1>t_2, P=1,2,\cdots). \tag{3.8}$$

据(2.3)中 a_i 的表达式可以证明a_i 单调递增且大于0,从而有(3.0),(3.1)以及(3.2). 据(3.2)可推得(3.3). 据(3.1),(3.2)可以证明(3.4). 据(3.0),(3.1),(3.2)可以证明 $1+m_1+m_2$ 随 P 增大而单调递减,且当 $P=1$ 时,$1+m_1+m_2=1+\frac{t_2}{t_1}$,当 $P\to\infty$时,$1+m_1+m_2\to t_1+t_2$,从而就有(3.5). 据(3.4),(3.5)可推得(3.6). 据(3.4),(3.6)可推得(3.7). 据(3.5),(3.7)及条件 $t_1>t_2$,可推得(3.8).

4 开环稳定性及闭环鲁棒性分析

定理1 在上述2中定义的DMC预测控制系统中,若 $G_P(z)=G_M(z)$,且 $G_M(z)$的零点在单位圆内,即$|t_1|>|t_2|$,则闭环系统是稳定的,与优化时域 P,滞后 l 等无关.

从2中分析可知,在无模型失配时,只要证明(2.4)中 $1+m_1z^{-1}+m_2z^{-2}$为稳定多项式即可. 实质上,据(3.2),(3.5)就有 $1+m_1+m_2>0$,据(3.7),(3.0)及$|t_1|>|t_2|$就有 $1-m_1+m_2>0$,据(3.4)有$|m_2|<1$. 综合上述结论及朱利稳定条件就有定理1中的结论.

定理2 在上述2中定义的DMC预测控制系统中,且 $G_M(z)$的零点在单位圆内,即$|t_1|>|t_2|$,若增益失配系数 k 满足:

$$|k|<\frac{t_1+t_2}{t_1+|t_2|} \quad (\text{当 } p(z)\text{有二正实根时}),$$

$$|k|<\frac{(1-\delta_1\delta_2)^2}{1+(\delta_1\delta_2)^2}\cdot\frac{t_1+t_2}{t_1+|t_2|} \quad (\text{当 } p(z)\text{有二复根且实部为正时}),$$

$$|k|<\frac{(1-\delta_1\delta_2)^2}{1+\delta_1\delta_2}\cdot\frac{t_1+t_2}{t_1+|t_2|} \quad (\text{当 } p(z)\text{有二复根且实部为负时}),$$

$$|k|<\frac{t_1-t_2}{t_1+|t_2|} \quad (\text{当 } p(z)\text{有二负实根时}),$$

则闭环系统是稳定的,且与 p,h,l 无关. 其中 $p(z)=z^2+m_1z+m_2$.

从2中分析可知,系统存在增益失配时的闭环稳定性取决于(2.5)中 $P_C(z)$是否为稳定多项式. 由定理1及 h 的取值范围知$(z^2+m_1z+m_2)(z-1+h)$为稳定多项式. 又根据推论1,只要$|k|<g$,则 $P_C(z)$就一定是稳定多项式,其中

$$g=\min_{|z|=1}\left|\frac{(z^2+m_1z+m_2)(z-1+h)}{d_sh(t_1z+t_2)}\right|. \tag{4.0}$$

由于
$$\min_{|z|=1}|z-1+h|=h, \quad (0<h\leqslant 1),$$
$$\max_{|z|=1}|t_1z+t_2|=t_1+|t_2|.$$

并由(3.3),(3.2),(3.5)有

$$g > \min_{|z|=1} \frac{|z^2 + m_1 z + m_2|}{1 + m_1 + m_2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{t_1 + |t_2|}. \tag{4.1}$$

1) 若 $p(z) = z^2 + m_1 z + m_2 = 0$ 有两复根 $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$，由(3.4)知

$$\alpha^2 + \beta^2 < \delta_1 \delta_2,$$

则

$$\min_{|z|=1} |z^2 + m_1 z + m_2| > (1 - \delta_1 \delta_2)^2.$$

当 $\alpha < 0$ 时，

$$1 + m_1 + m_2 \leqslant (1 + \delta_1 \delta_2)^2,$$

则(4.1)式为

$$g > \frac{(1 - \delta_1 \delta_2)^2}{(1 + \delta_1 \delta_2)^2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{t_1 + |t_2|}. \tag{4.2}$$

当 $\alpha \geqslant 0$ 时，

$$1 + m_1 + m_2 < 1 + \delta_1^2 \delta_2^2,$$

则(4.1)式为

$$g > \frac{(1 - \delta_1 \delta_2)^2}{1 + \delta_1^2 \delta_2^2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{t_1 + |t_2|}. \tag{4.3}$$

2) 当 $P(z) = 0$ 有两正实根，则

$$\min_{|z|=1} |z^2 + m_1 z + m_2| = 1 + m_1 + m_2,$$

则(4.1)式为

$$g > \frac{t_1 + t_2}{t_1 + |t_2|}. \tag{4.4}$$

3) 若 $P(z) = 0$ 有两负实根，则

$$\min_{|z|=1} |z^2 + m_1 z + m_2| = 1 - m_1 + m_2,$$

则据(3.8)，(4.1)知

$$g > \frac{t_1 - t_2}{t_1 + |t_2|}. \tag{4.5}$$

综合(4.0)～(4.5)就有定理 2 中的结论．另外应该注意到，定理 2 中的条件是充分的．

5 结　　论

1) 二阶惯性滞后系统，在取控制时域为 1，没有软约束(即 $R = 0$)，以及适当的 Q 阵时，若系统的离散化模型为最小相位系统，则 DMC 预测控制器 $G_C(z)$ 是稳定的，与 P, l 等无关，且可以找到与 P, h, l 无关的可保持闭环稳定的增益允许失配范围的定量表达式．

2) 若令 $\tau_2 = \tau_3 = 0$ 时，可以自然推得一阶惯性环节加纯滞后的情况．即：预测控制器是稳定的，若增益失配系数 $|k| < 1$ 时，闭环系统是稳定的，这些结论与 P, h, τ_1, T 均无关．这个结论与文献[1]的结论一致．

3) 经仿真研究，进一步证实了结论的正确性．

参 考 文 献

1　席裕庚著．预测控制．北京：国防工业出版社，1993

2　《数学手册》编写组．数学手册．北京：人民教育出版社，1981

Research of Closed-Loop for DMC Predictive Control of Second-Order System

XIE Yongbin, LUO Zhong, FENG Zuren and HU Baosheng

(Systems Engineering Institute, Xi'an Jiaotong University·Xi'an, 710049, PRC)

Abstract: This paper deals with stability and gain mismatch bounds analysis for a class of second-order systems which are controlled by the method of DMC. We can design a control system by using this theoretical result quantitatively.

Key words: stable polynomial; gain mismatch bounds; closed-loop stability; dynamic matrix control

本文作者简介

谢永斌 1965年生. 西安交通大学系统工程研究所博士研究生. 主要从事过程控制, 预测控制, 人工神经网络等领域的研究.

罗 忠 1968年生. 西安交通大学电子与信息工程学院博士研究生. 主要从事系统辨识, 模式识别, 人工神经网络等领域的研究.

冯祖仁 1953年生. 1988年在西安交通大学获博士学位. 现在西安交通大学系统工程研究所任教授, 副所长. 主要从事控制理论, 机器人, 计算机集成制造等方面的研究. 发表论文30余篇.

胡保生 1930年生. 教授, 博士生导师. 1951年毕业于上海大同大学, 历任西安交通大学无线电工程系和信息与控制工程系主任, 现任系统工程研究所所长. 主要研究方向: CIMS的建模与控制, 基于并行计算的控制算法, 离散事件系统的理论与应用, 人机系统等.