第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

# MIMO 系统参数集员辨识的优化算法

王文正　蔡金狮
(中国空气动力研究与发展中心·四川绵阳, 621000)

**摘要**: 在噪声瞬时有界的情况下, 提出了多输入多输出(MIMO)系统参数集员辨识的两种优化算法. 这两种优化算法具有识别冗余数据的能力, 而且与最小二乘方法相比具有更好的性能. 文中的仿真例子验证了上述结果.

**关键词**: 集员辨识; 优化算法; 最小二乘法

## 1 引　言

自从 Witsenhausen[1]和 Schweppe[2]在六十年代后期的开创性工作以来, 集员辨识已成为在国际控制论界日益受到重视的一种系统辨识方法. 研究集员辨识的一个主要动因是: 集员辨识不对系统噪声的统计分布特性作假定, 只要求已知系统噪声的上界. 文献[3]研究了系统噪声在能量约束情况下系统参数的集员辨识问题, 文献[5]将文献[3]中的结果推广到多输入多输出(MIMO)系统参数的集员辨识上. 本文在文献[4]和[5]的基础上, 给出了 MIMO 系统参数集员辨识的两种优化算法. 本文的主要贡献在于将优化算法应用到了 MIMO 系统参数集员辨识上, 与文献[5]中的最小二乘方法相比, 有两点优越性: 第一, 本文的方法具有更好的性能(能给出比最小二乘法更小的包含真参数的椭球); 第二, 具有识别冗余数据的能力, 能够减少计算量.

## 2 集员估计问题及其递推解

由文献[5]可知, MIMO 线性系统可写成回归形式

$$y_k = \theta^{\mathrm{T}} X_k + w_k. \tag{1}$$

其中 $y_k$ 是 $m$ 维的输出, $\theta^{\mathrm{T}}$ 是 $m \times n$ 维的待估参数阵, $X_k$ 是 $n$ 维的回归矢量, $w_k$ 是 $m$ 维的动态噪声, 其功率瞬时有界, 即

$$\| w_k \|^2 \leqslant \delta_k. \tag{2}$$

$k-1$ 时刻包含 $\theta$ 的边界椭球 $\Theta_{k-1}$ 可写成

$$\theta \in \Theta_{k-1} = \{\theta : \mathrm{tr}(\theta - \theta_c(k-1))^{\mathrm{T}} P_{k-1}^{-1} (\theta - \theta_c(k-1)) \leqslant 1\}. \tag{3}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示 $(\cdot)$ 的迹, $\theta_c(k-1)$ 为 $\Theta_{k-1}$ 的中心, $P_{k-1}$ 是表征 $\Theta_{k-1}$ 形状和大小的 $n$ 维方阵.

设 $S_k$ 是 $k$ 时刻的观测数据 $y_k$ 以及(2)式所决定的参数 $\theta$ 的集合, 则

$$\theta \in S_k = \{\theta : \| y_k - \theta^{\mathrm{T}} X_k \|^2 \leqslant \delta_k\}. \tag{4}$$

显然, 在 $k$ 时刻包含 $\theta$ 的集合应该是 $\Theta_{k-1}$ 与 $S_k$ 的交集, 这个交集不一定仍是椭球, 为运算简便起见, 取边界椭球 $\Theta_k \supset \Theta_{k-1} \wedge S_k$ 作为这个交集的近似, 则 $\Theta_k$ 可写为

$$\Theta_k = \{\theta : \mathrm{tr}(\theta - \theta_c(k-1))^{\mathrm{T}} P_{k-1}^{-1} (\theta - \theta_c(k-1)) + q_k \| y_k - \theta^{\mathrm{T}} X_k \|^2 \leqslant 1 + q_k \delta_k\}. \tag{5}$$

其中 $q_k \geqslant 0$. 将(5)式展开并进行整理可得

$$\Theta_k = \{\theta : \mathrm{tr}(\theta - \theta_c(k))^{\mathrm{T}} P_k^{-1} (\theta - \theta_c(k)) \leqslant 1\}. \tag{6}$$

本文于 1995 年 5 月 23 日收到. 1996 年 7 月 8 日收到修改稿.

其中

$$\theta_c(k)=\theta_c(k-1)+a_kP_{k-1}X_k[y_k^{\mathrm{T}}-X_k^{\mathrm{T}}\theta_c(k-1)], \tag{7}$$

$$P_k=\beta_k(P_{k-1}-\alpha_kP_{k-1}X_kX_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}), \tag{8}$$

$$\alpha_k=q_k/(1.0+q_kX_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}X_k), \tag{9}$$

$$\beta_k=1.0+q_k\delta_k-\alpha_k\mathrm{tr}\{[y_k-\theta_c^{\mathrm{T}}(k-1)X_k][y_k^{\mathrm{T}}-X_k^{\mathrm{T}}\theta_c(k-1)]\}. \tag{10}$$

(6)~(10)式用边界椭球法构成了参数集员估计的递推算法. 当 $q_k$ 恒取为1.0时,上述结果与文献[5]中的结果完全一致. $\theta_c(0)$可由先验信息所获得的参数 $\theta$ 的初始估计值给出. 或取 $\theta_c(0)=0,P_0=\delta I$,其中 $\delta$ 是足够大的正数,以保证 $\Theta_0$ 包含参数真值.

## 3 优化算法

为在几何意义上表示边界椭球 $\Theta_k$ 的大小,给出以下定义

**定义** $$\mu_v(k)=\det(P_k),\quad \mu_T(k)=\mathrm{tr}(P_k). \tag{11}$$

其中 $\det(P_k)$为 $P_k$ 的行列式值,它与边界椭球 $\Theta_k$ 的体积成正比,$\mathrm{tr}(P_k)$为 $P_k$ 的迹,它与边界椭球 $\Theta_k$ 在半轴上投影的平方和成正比. 为简便起见,记

$$E_k^2=\mathrm{tr}\{[y_k-\theta_c^{\mathrm{T}}(k-1)X_k][y_k^{\mathrm{T}}-X_k^{\mathrm{T}}\theta_c(k-1)]\}, \tag{12}$$

$$G_k=X_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}X_k, \tag{13}$$

$$H_k=X_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}^2X_k. \tag{14}$$

**最小体积算法**

最小体积算法(算法1)就是如何选择 $q_k\geqslant 0$ 使 $\mu_v(k)$最小. 由(8)式和(9)式有

$$P_k=\beta_k[I-q_kP_{k-1}X_kX_k^{\mathrm{T}}/(1.0+q_kX_k^{\mathrm{T}}P_{k-1}X_k)]P_{k-1}. \tag{15}$$

则

$$\mu_v(k)=\det P_k=\beta_k^n\mu_v(k-1)/(1.0+q_kG_k). \tag{16}$$

极小化 $\mu_v(k)$,得 $q_k$ 是以下方程的正实根

$$G_k\delta_kq_*^2+(\delta_k+G_k-E_k^2)q_*+1.0=0, \tag{17}$$

$$(n-1)G_k^2\delta_kq_*^2+G_k[(2n-1)\delta_k-G_k+E_k^2]q_*+n(\delta_k-E_k^2)-G_k=0. \tag{18}$$

可以证明当 $\Theta_{k-1}$和 $S_k$ 的交集存在时,方程(17)无正实根,将方程(18)的正实根代入(7)式~(10)式,则可计算 $\theta_c(k)$和 $P_k$. 若方程(18)无正实根,则 $q_k=0$,于是 $\theta_c(k)=\theta_c(k-1)$, $P_k=P_{k-1}$,对应的数据 $y_k$ 为冗余数据.

**最小迹算法**

最小迹算法(算法2)就是如何选择 $q_k\geqslant 0$ 使 $\mu_T(k)$最小. 由(15)式有

$$\mu_T(k)=\mathrm{tr}(P_k)=\beta_k[\mu_T(k-1)-q_kH_k/(1.0+q_kG_k)]. \tag{19}$$

极小化 $\mu_T(k)$,得 $q_k$ 是以下方程

$$B_0q_*^3+B_1q_*^2+B_2q_*+B_3=0 \tag{20}$$

的正实根,其中

$$B_0=G_k^2\delta_k[G_k\mu_T(k-1)-H_k],$$

$$B_1=3G_k\delta_k[G_k\mu_T(k-1)-H_k],$$

$$B_2=G_k[\mu_T(k-1)(\delta_k-E_k^2)-H_k]+2[G_k\mu_T(k-1)\delta_k-H_k(\delta_k-E_k^2)],$$

$$B_3=\mu_T(k-1)(\delta_k-E_k^2)-H_k.$$

将方程(20)的正实根代入(7)式~(10)式,则可计算 $\theta_c(k)$和 $P_k$. 若方程(20)无正实根,则 $q_k=0$,于是 $\theta_c(k)=\theta_c(k-1)$, $P_k=P_{k-1}$,对应的数据 $y_k$ 为冗余数据.

## 4 仿真结果

**算例**

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 \\ -0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k-1) \\ u_2(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix}.$$

取 $u_1(k)$ 以 20 为周期，$u_1(k)=16, k=1,\cdots,10$；$u_1(k)=-18, k=11,\cdots,20$. $u_2(k)$ 以 10 为周期，$u_2(k)=6, k=1,\cdots,5$；$u_2(k)=-7, k=6,\cdots,10$. $e_1(k)$ 和 $e_2(k)$ 分别为 $-0.1$ 到 0.1 和 $-0.2$ 到 0.2 不相关的均匀随机噪声. 取 $\delta_k=0.05$ 为噪声的瞬时约束.

对算例在相同条件下，同时采用了三种算法，即文[5]中的最小二乘算法、本文的算法 1 和算法 2，其结果比较如表 1. 从表 1 可以看出，三种算法对参数的中心估计与参数真值都非常接近，给出的参数估计区间都包含参数真值，但优化算法(算法 1 和算法 2)给出的参数估计区间比最小二乘算法给出的小. 另外，在算例采样的 200 个数据点中，采用优化算法时，大约有 20%～30% 的数据为有用数据，其余的为冗余数据，这就大大减少了参数估计更新的时间，提高了优化算法的计算效率，减少了计算量.

表 1　参数中心估计和区间估计的比较

| 参数 | 真值 | 最小二乘算法 | | 算法 1 | | 算法 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 中心估计 | 区间估计 | 中心估计 | 区间估计 | 中心估计 | 区间估计 |
| a11 | 0.10 | 0.09965 | (0.0882;0.1111) | 0.09937 | (0.0921;0.1066) | 0.09912 | (0.0914;0.1069) |
| a21 | −0.60 | −0.60084 | (−0.6308; −0.5709) | −0.60097 | (−0.6200; −0.5820) | −0.60138 | (−0.6217; −0.5811) |
| a12 | −0.20 | −0.20006 | (−0.2116; −0.1886) | −0.20014 | (−0.2074; −0.1929) | −0.19999 | (−0.2077; −0.1922) |
| a22 | 0.70 | −0.69965 | (0.6697;0.7296) | 0.69990 | (0.6809;0.7189) | 0.69982 | (0.6795;0.7201) |

## 5 结　论

本文推导了 MIMO 系统在噪声瞬时约束的情况下，递推的参数集员辨识公式，给出了两种优化算法，算例表明优化算法与最小二乘法相比具有更好的性能和更高的计算效率.

## 参 考 文 献


1 Wistenhausen, H.S.. Sets of possible states of linear systems given perturbed observations. IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, AC-13(5):556－558

2 Schweppe, F. C.. Recursive state estimation: Unknown but bounded errors and system inputs. IEEE Trans. Automat. Contr., 1968, AC-13(1): 22－28

3 Fogel, E.. System identification via membership set constraints with energy constrained noise. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, AC-24(5): 752－758

4 Fogel, E. and Huang, Y.F.. On the value of information in system identification-bounded noise case. Automatica, 1982, (2): 229－238

5 袁震东，徐桥南. 多输入多输出系统参数的集员辨识. 控制理论与应用，1994，11(4):404－412

# Optimal Algorithms of Set Member Identification for Parameters of MIMO Systems

WANG Wenzheng and CAI Jinshi

(Aerodynamical Research and Development Center of China·Shicuan Mianyang, 621000, PRC)

**Abstract**: Assuming intantanous bounds on the noise, two optimal algorithms of set membership identification for parameters of MIMO systems are presented in this paper. The algorithms can detecte redundant data and have improved performance when compared with the least square algorithm. At last the previous results are tested by the simulation example.

**Key words**: set membership identification; optimal algorithms; least square method

## 本文作者简介

**王文正** 1968年生. 1992年西北工业大学飞机系硕士毕业. 同年分配到中国空气动力研究与发展中心工作. 现为西北工业大学航天学院博士研究生. 主要研究方向为飞行力学,系统辨识等.

**蔡金狮** 1935年生. 1958年毕业于北京大学数学力学系. 现为中国空气动力研究与发展中心研究员、哈尔滨工业大学兼职教授、厦门大学兼职教授、西北工业大学飞行力学博士生导师. 主要研究方向为飞行力学,空气动力学,飞行器系统辨识等.