第 14 卷第 3 期
1997 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 3
Jun., 1997

用实 QZ 分解讨论广义系统*

叶庆凯
(北京大学力学系, 100871)

摘要: 本文采用实 QZ 分解技术给出了广义系统(可以不满足正规性条件)的一种标准形, 此标准形与某一状态空间形系统有相同的阶与传递函数.

关键词: 广义系统; 正规性条件; QZ 分解

1 引　　言

对于状态空间形式的线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\qquad y = Cx + D(s)u \tag{1}$$

的性质已有很充分的讨论[1]. 但是, 某些情况下, 通过建模得到的数学模型具有形式

$$E\dot{x} = Ax + Bu,\qquad y = Cx + D(s)u. \tag{2}$$

其中 x 为 n 维矢量, u 为 l 维矢量, y 为 m 维矢量, 各矩阵具有相容的维数, E 的秩为 r, A 的秩为 p.

通常, 称系统(2)为广义系统.

2 实 QZ 分解

定理　设 E, A 为 $n \times n$ 实矩阵, 其秩为 r 和 p, 则存在正交矩阵 Q 与可逆矩阵 Z 使得

$$Q'EZ = \begin{bmatrix} E_r & X \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$Q'AZ = \begin{bmatrix} O & X & X & \cdots & X & X \\ O & O & X & \cdots & X & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & O & X \\ O & O & O & \cdots & O & I_t \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中 E_r 是 $r \times r$ 伪上三角形矩阵, $t \leqslant p$.

证　1) 设 $A = O$. 对 E 进行 SVD 分解得

$$U'EV = \begin{bmatrix} D & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

其中 D 为 $r \times r$ 对角矩阵; U, V 为正交矩阵. 取 $Q = U$, $Z = V$, 定理得证.

2) 设 A 可逆. 此时 EA^{-1} 的秩为 r, 对它进行实 Schur 分解[2], 可得正交矩阵 Q 使得

$$Q'(EA^{-1})Q = \begin{bmatrix} E_r & X \\ O & O \end{bmatrix}.$$

---

* 国家自然科学基金资助项目. 高等学校博士学科点专项基金资助项目.

本文于 1994 年 11 月 29 日收到. 1996 年 7 月 8 日收到修改稿.

其中 E_r 为 $r \times r$ 的上三角形矩阵.

取 $Z = A^{-1}Q$，则 $Q'EZ$ 与 $Q'AZ$ 均具有要求的形式. 定理得证.

3) 设 A 的秩为 p，$0 < p < n$. 此时存在正交矩阵 V 使得

$$AV = [O \quad \bar{A}].$$

其中 $n \times p$ 矩阵 $\bar{A}$ 是列满秩的. 由于 EV 的秩为 r，对它进行 QR 分解可得正交矩阵 U 使得

$$U'EV = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ O & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 & X \\ O & E_1 \end{bmatrix}.$$

其中 R_1 为 $r \times r$ 上三角矩阵；E_0, E_1 分别是 $n-p$ 阶和 p 阶上三角方阵，E_1 的秩 $r_1 < r$. 此时

$$U'AV = \begin{bmatrix} O & X \\ O & A_1 \end{bmatrix}.$$

其中 A_1 是 p 阶方阵，其秩 $p_1 \leqslant p$.

如果能对 $p \times p$ 矩阵 E_1, A_1 实现实 QZ 分解，即找到 $p \times p$ 的正交矩阵 Q_1 及可逆矩阵 Z_1 使得

$$Q'_1 E_1 Z_1, \qquad Q'_1 A_1 Z_1$$

具有式(3) 和(4) 的形式，则可取

$$Q' = \begin{bmatrix} I & O \\ O & Q'_1 \end{bmatrix} U', \quad Z = V \begin{bmatrix} I & O \\ O & Z_1 \end{bmatrix}.$$

此时有

$$Q'EZ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & Q'_1 \end{bmatrix} U'EV \begin{bmatrix} I & O \\ O & Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 & X \\ O & Q'_1 E_1 Z_1 \end{bmatrix},$$

$$Q'AZ = \begin{bmatrix} I & O \\ O & Q'_1 \end{bmatrix} U'AV \begin{bmatrix} I & O \\ O & Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & X \\ O & Q'_1 A_1 Z_1 \end{bmatrix}.$$

它们具有要求的形式.

这样，就把 n 阶实 QZ 分解问题转换成 p 阶($p < n$) 实 QZ 分解问题. 经有限次转换后总可使相应的 A_1 是可逆的或是零矩阵. 定理得证.

3 用实 QZ 分解讨论广义系统

可以用直接验证的方法证实如下引理.

引理 若矩阵 E 可逆，则系统

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_0 u + B_1 \dot{u} + \cdots + B_j u^{(j)}, \\ y &= Cx + D(s)u \end{aligned} \tag{5}$$

和系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= E^{-1}Ax + E^{-1}(B_0 + AE^{-1}B_1 + \cdots + (AE^{-1})^j B_j)u, \\ y &= Cx + (D(s) + W(s))u \end{aligned} \tag{6}$$

有相同的阶与传递函数，其中

$$\begin{aligned} W(s) = {} & CE^{-1}\{B_1 + (s + AE^{-1})B_2 + [s^2 + AE^{-1}s + (AE^{-1})^2]B_3 + \cdots \\ & + [s^{j-1} + AE^{-1}s^{j-2} + (AE^{-1})^2 s^{j-3} + \cdots + (AE^{-1})^{j-1}]B_j\} \\ = {} & CE^{-1}\{[B_1 + AE^{-1}B_2 + \cdots + (AE^{-1})^{j-1}B_j] + [B_2 + AE^{-1}B_3 + \cdots + (AE^{-1})^{j-2}B_j]s \\ & + \cdots + [B_{j-1} + AE^{-1}B_j]s^{j-2} + B_j s^{j-1}\}. \end{aligned} \tag{7}$$

现在考虑广义系统(2). 对矩阵 E,A 进行实 QZ 分解,得到正交矩阵 Q 和可逆矩阵 Z 使得

$$E_1=Q'EZ,\qquad A_1=Q'AZ$$

具有式(3)和(4)给出的形式. 代入方程(2)得

$$\begin{aligned}&E_1(Z^{-1}\dot{x})=A_1(Z^{-1}x)+Q'Bu,\\&y=CZ(Z^{-1}x)+D(s)u.\end{aligned}\tag{8}$$

下面分两种情况进行讨论.

1) 设 $r+t\geqslant n$. 记

$$Z^{-1}x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}\\O&O\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&I_{n-r}\end{bmatrix},$$

$$Q'B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\quad CZ=[C_1\quad C_2].$$

其中 x_1 为 r 维矢量,E_{11},A_{11} 为 $r\times r$ 矩阵. 方程(8)成为

$$\begin{aligned}&E_{11}\dot{x}_1+E_{12}\dot{x}_2=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u,\\&O=x_2+B_2u,\\&y=C_1x_1+C_2x_2+D(s)u.\end{aligned}$$

由于 x_2 只是 u 的线性组合,上式可简化为

$$\begin{aligned}&E_{11}\dot{x}_1=A_{11}x_1+(B_1-A_{12}B_2)u+E_{12}B_2\dot{u},\\&y=C_1x_1+(D(s)-C_2B_2)u.\end{aligned}\tag{9}$$

2) 设 $r+t<n$. 记 $k=n-(r+t)$以及

$$Z^{-1}x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad E_1=\begin{bmatrix}E_{11}&E_{12}&E_{13}\\O&O&O\\O&O&O\end{bmatrix},\quad A_1=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\O&A_{22}&A_{23}\\O&O&I_t\end{bmatrix},$$

$$Q'B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix},\quad CZ=[C_1\quad C_2\quad C_3].$$

其中 x_1,x_3 分别为 r 维及 t 维矢量,E_{11},A_{11} 为 $r\times r$ 矩阵,A_{22} 为 $k\times k$ 严格上三角矩阵,其他分块使方程(8)是相容的. 方程(8)成为

$$\begin{aligned}&E_{11}\dot{x}_1+E_{12}\dot{x}_2+E_{13}\dot{x}_3=A_{11}x_1+A_{12}x_2+A_{13}x_3+B_1u,\\&O=A_{22}x_2+A_{23}x_3+B_2u,\\&O=x_3+B_3u,\\&y=C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3+D(s)u.\end{aligned}$$

由于 x_3 只是 u 的线性组合,上式可简化为

$$\begin{aligned}&E_{11}\dot{x}_1+E_{12}\dot{x}_2=A_{11}x_1+A_{12}x_2+(B_1-A_{13}B_3)u+E_{13}B_3\dot{u},\\&O=A_{22}x_2+(B_2-A_{23}B_3)u,\\&y=C_1x_1+C_2x_2+(D(s)-C_3B_3)u.\end{aligned}\tag{10}$$

引入新的 $l+k$ 维控制变量 $v=\begin{bmatrix}u\\x_2\end{bmatrix}$. 当然,它的各元素之间必须满足方程(10)的第二个方程. 设矩阵

$$[A_{22}\quad B_2-A_{23}B_3]$$

的秩为 s，则 v 中可独立变化的元素个数等于 $l+k-s$，设它们构成矢量 v_1. 因而，存在满列秩的 $(l+k)(l+k-s)$ 矩阵 T 使得

$$v = Tv_1.$$

以 v_1 为输入，系统(10)成为

$$\begin{aligned} E_{11}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + [B_1 - A_{13}B_3 \quad A_{12}]Tv_1 + [E_{13}B_3 \quad -E_{12}]T\dot{v}_1, \\ y &= C_1x_1 + [D(s) - C_3B_3 \quad C_2]Tv_1. \end{aligned} \tag{11}$$

可见，经过一次实 QZ 变换，总可以将系统(2)转换为系统(9)或系统(11). 此时，系统(2)中秩为 r 的 $n\times n$ 矩阵 E 转换成了秩为 $r_1\leqslant r$ 的 $r\times r$ 矩阵 E_{11}，而方程右端可能出现下述变化：a) 输入 u 可能需要更改为维数更高的输入 v_j. b) 可能出现输入的一阶导数项.

如果 E_{11} 仍不可逆，即 $r_1<r$，可对系统(9)或(11)再进行上述变换以使矩阵 E_{11} 的维数和秩进一步下降. 假定经 j 次转换后所得系统的 E_{11} 是可逆的(特殊情况下 E_{11} 可为空矩阵，即 x_1 的维数为零，这表明系统的输出只是输入及其导数的线性组合)，此时方程右端的输入 u 可能更改为输入 v_j 且可能出现 $\dot{v}_j, \ddot{v}_j, \cdots, v_j^{(j)}$ 项.

这样，我们就在不对广义系统的系数矩阵作任何限制的情况下证明了如下结论.

定理　任何一个广义系统(可以不满足正规性条件)在进行适当的状态变换以及把某些状态视为新的控制变量后，总可以转换成形式

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_0u + B_1\dot{u} + \cdots + B_ju^{(j)}, \\ y &= Cx + D(s)u. \end{aligned} \tag{12}$$

其中 E 是可逆的.

我们把形如(12)的系统称为广义系统(2)的标准形. 由引理可知，这种标准形与状态空间形系统(6)有相同的阶和传递函数.

4　数　　例

例 1　设广义系统的系数矩阵为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 3), \quad D(s) = 0.$$

此系统满足正规性条件 $|sE-A|\neq 0$. 由目前已有结论容易得出该系统的阶数为 1，传递函数为 $G(s) = C(sE-A)^{-1}B + D(s) = -2$. 用本文的方法，由于 $x_2 = -u$，上述广义系统的标准形是

$$\dot{x}_1 = x_1 - u + \dot{u}, \quad y = x_1 - 3u.$$

取新的状态变量 $x = x_1 - u$，此标准形与系统

$$\dot{x} = x, \quad y = x - 2u$$

有相同的阶数与传递函数. 容易看出，其阶数为 1，传递函数为 $G(s) = -2$. 与前述结论一致.

例 2　设广义系统的系数矩阵为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 3), \quad D(s) = 0.$$

此系统不满足正规性条件，已有结论无法进一步讨论其性质. 用本文的方法，将 x_2 视为新的控制变量，该广义系统的标准形为

$$\dot{x}_1 = x_1 + u + 2v - \dot{v}, \quad y = x_1 + 3v.$$

取新的状态变量 $x = x_1 + v$，此标准形与系统

$$\dot{x} = x + u + v, \quad y = x + 2v$$

有相同的阶数与传递函数. 显然,与原广义系统相比,输入个数增加了,$D(s)$ 的次数提高了.

本例表明,产生这种情况是由于在建模时把某些控制变量当作状态变量来处理了. 而本文提出的实 QZ 分解技术可以把这些变量分离出来.

感谢 本文写作过程中,黄琳教授,于年才教授提出了很多宝贵的意见. 特别是于年才教授在 QZ 分解技术上提出了可实现算法. 在此向他们表示感谢.

参 考 文 献

1 叶庆凯. 线性系统与多变量控制. 北京:国防工业出版社,1989

2 叶庆凯. 控制系统计算机辅助设计. 北京:北京大学出版社,1990

The Approach to Descriptor System by Real QZ Technique

YE Qingkai

(Department of Mechanics, Peking University·Beijing, 100871, PRC)

Abstract: In this paper, using real QZ technique, a standard form of the descriptor system (even if the regularize condition is not satisfied) has posed. The order and transform function of this standard form is the same as a state-space system.

Key words: descriptor system; regularize condition; real QZ technique

本文作者简介

叶庆凯 1939 年生. 1962 年毕业于北京大学数学力学系. 现任北京大学力学与工程科学系教授、博士生导师. 感兴趣的研究领域包括控制系统计算机辅助设计,优化与最优控制中的计算方法等.