第14卷第3期
1997年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.14, No.3
Jun., 1997

时变系统渐近稳定性的一个改进了的必要条件

王冠君

(中国科学院系统科学研究所·北京,100080)

摘要:本文证明了时变系统渐近稳定性的一个必要条件.改进了文[1]中的一个结果.

关键词:稳定性;渐近稳定性;指数稳定性

1 引言和结果

在反馈控制系统的分析与设计中,系统的稳定性是首先需要考虑的问题之一,因为它关系到系统能否正常工作.按系统设计中的不同要求,对稳定性又有许多不同的定义方式.这里我们考虑的是 Lyapunov 意义下的稳定性概念.对于 n 阶时变线性系统

$$X(t+1) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

定义其状态转移矩阵为 $\phi(t,s)$,即

$$\phi(t,s) = \begin{cases} A(t-1)\cdots A(s), & t > s, \\ I, & t = s. \end{cases}$$

定义 1 对任意的 t_0,若 $\|\phi(t,t_0)\| \to 0 (t\to\infty)$,则称方程(1.1)渐近稳定.

定义 2 存在 $c>0$,对任意的 t_0,任意的 $t>t_0$,若有 $\|\phi(t,t_0)\| \leqslant M\exp\{-c(t-t_0)\}$($M$ 为一正常数),则称方程(1.1)为指数稳定.

注 在本文中,对任意矩阵 A 的范数均采用欧几里得范数所诱导的范数,即 $\|A\| = \{\lambda_{\max}(AA^{\mathrm{T}})\}^{\frac{1}{2}}$.

本文以下主要讨论形如

$$X_{n+1} = (I - A_n)X_n, \quad n \geqslant 0 \tag{1.2}$$

的时变系统稳定性问题,其中假定 $0 \leqslant A_n \leqslant I, \forall n \geqslant 0$.从数学的角度讲,对矩阵 A_n 的非负定性假定比较苛刻,然而对一大类应用问题,例如,信号处理、自适应控制、适应滤波等中遇到的一些问题都满足这个假设.方程(1.2)通常对应各类递推估计算法之误差的齐次部分(见[2]).它的稳定性问题是研究这类算法的关键.我们先从一个简单的命题开始.

命题 1[1] 设实数列 $a_i \in (0,1), i \geqslant 1$,那么下列两结论成立:

i) $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i) \to 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$.

ii) 存在 $M>0, \lambda\in(0,1)$ 使 $\prod\limits_{i=m+1}^{n}(1-a_i) \leqslant M\lambda^{n-m}, \forall n \geqslant m, \forall m \geqslant 0 \Leftrightarrow$ 存在整数 $h>0$,使 $\inf \sum\limits_{i=n+1}^{n+h} a_i \neq 0$.

容易看出,命题1中的结论 i)和 ii)分别对应一维情形下方程(1.2)的渐近稳定性和指数稳定性.命题1引发我们考虑在矩阵情形下能否建立与命题1相应的结果.[1]给出了:

本文于1995年10月31日收到.1996年6月10日收到修改稿.

命题 2[1]　设 $0 \leqslant A_k \leqslant I, A_k \in \mathbb{R}^{p\times P}, k \geqslant 0$,则方程(1.2) 渐近稳定 $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{\max}(A_i) = \infty$.

命题 3[1]　设 $0 \leqslant A_k \leqslant I, A_k \in \mathbb{R}^{p\times P}, k \geqslant 0$,则方程(1.2) 指数稳定 $\Leftrightarrow$ 存在正整数 $h > 0$,使 $\delta \triangleq \inf_{k\geqslant 0}\lambda_{\min}(\sum_{i=k+1}^{k+h} A_i) \neq 0$.

明显地,命题 3 完全把命题 1 中的结论 ii)推广到了矩阵的情形,结果令人相当满意;命题 2 的结果看似仍有待改进的余地.本文的主要工作就是致力于改进命题 2 的结果,即得到了非负定系统渐近稳定性的一个更为精细的必要条件,这就是

定理　设 $0\leqslant A_k \leqslant I, k \geqslant 0, A_k \in \mathbb{R}^{p\times P}$,则 $X_{n+1} = (I - A_n)X_n$ 渐近稳定 $\Rightarrow \lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{n} A_i) \to \infty$.

2　定理的证明

在证明定理之前,先引进几个引理.考虑到篇幅,只证明引理 5.

引理 1　设 $0 \leqslant A_k \leqslant I, k \geqslant 0, A_k \in \mathbb{R}^{p\times P}$,则以下二结论等价:

i) 存在一单位向量 X_0,使 $\sum_{i=1}^{\infty} X_0 A_i X_0'$ 收敛;

ii) 存在一有界正常数 M, $\forall\, n$,有 $\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{n} A_i) < M$.

引理 2　设 $a_k \in (0,1)$ 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛,则 $\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) \to 1(n \geqslant i \to \infty)$.

引理 3　若 $0\leqslant \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \alpha' & A \end{pmatrix} \leqslant I$(其中 a 是一非负实数,α 是 $p-1$ 维向量,$A \in \mathbb{R}^{(p-1)\times(p-1)}$).则对任意的 $c(|c|\leqslant 1)$,有 $0\leqslant \begin{pmatrix} a & c\alpha \\ c\alpha' & A \end{pmatrix} \leqslant I$.

引理 4　设 $0\leqslant A = \begin{bmatrix} a^2 & a\alpha \\ a\alpha' & A_0 \end{bmatrix} \leqslant I$(这里 a 是一实数,α 是 $p-1$ 维向量,A_0 是 $p-1$ 阶方阵)则 $A = \begin{bmatrix} a^2 & a\alpha \\ a\alpha' & A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a^2 & a\alpha \\ a\alpha' & \frac{\alpha'\alpha}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & A_0 - \frac{\alpha'\alpha}{2} \end{bmatrix}$中,有

i) $\left\| I - 2\begin{bmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & A_0 - \frac{\alpha'\alpha}{2} \end{bmatrix} \right\| \leqslant 1 + 2a^2$.

ii) 若 $|a| \leqslant \frac{1}{2}$,则对任意的 $c(|c|\leqslant 1)$,有 $\left\| \begin{bmatrix} 1 - 4a^2 & c\cdot 2a\alpha \\ \pm 2a\alpha' & I - \alpha'\alpha \end{bmatrix} \right\| \leqslant 1$.

引理 5　设 $0 \leqslant A_i, A_i \in \mathbb{R}^{p\times p}, a_{11}^{(i)} = eA_ie'$(其中 $e = (1,0,\cdots,0)$ 是 p 维向量).若 $\sum_{i=1}^{\infty} a_{11}^{(i)}$ 收敛,则有

$$\lim_{n\geqslant i\to\infty} e(I - A_n)\cdots(I - A_i)^2\cdots(I - A_n)e' = 1.$$

证　记 $A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i \\ \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i' & A_{i0} \end{bmatrix}$,则 A_i 可分解为

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i \\ \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i' & A_{i0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11}^{(i)} & \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i \\ \sqrt{a_{11}^{(i)}}\alpha_i' & \dfrac{\alpha_i'\alpha_i}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & A_{i0} - \dfrac{\alpha_i'\alpha_i}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}a_{11}^{(i)} \\ \dfrac{\alpha_i'}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \left(\sqrt{2}a_{11}^{(i)} \quad \dfrac{\alpha_i'}{\sqrt{2}}\right) + \begin{bmatrix} -a_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & A_{i0} - \dfrac{\alpha_i'\alpha_i}{2} \end{bmatrix} \triangleq \phi_i'\phi_i + \begin{bmatrix} -a_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix}.$$

考察

$$(I - A_i)\cdots(I - A_n)$$

$$= \frac{1}{2^{n-i+1}}\left[(I - 2\phi_i'\phi_i) + \left[I - 2\begin{bmatrix} -a_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & \bar{A}_i \end{bmatrix}\right]\right]\cdots\left[(I - 2\phi_n'\phi_n) + \left[I - 2\begin{bmatrix} -a_{11}^{(n)} & 0 \\ 0 & \bar{A}_n \end{bmatrix}\right]\right]$$

$$\triangleq \frac{1}{2^{n-i+1}}\prod_{j=i}^{n}\left[\begin{bmatrix} 1 - 4a_{11}^{(i)} & -2\sqrt{a_{11}^{(j)}}\alpha_j \\ -2\sqrt{a_{11}^{(j)}}\alpha_j' & I - \dfrac{\alpha_j\alpha_j}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + 2a_{11}^{(j)} & 0 \\ 0 & 1 - 2\bar{A}_j \end{bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-i+1}}\sum B_iB_{i+1}\cdots B_n. \tag{2.1}$$

这里 B_k 取 $\begin{bmatrix} 1 - 4a_{11}^{(k)} & -2\sqrt{a_{11}^{(k)}}\alpha_k \\ -2\sqrt{a_{11}^{(k)}}\alpha_k' & I - \alpha_k'\alpha_k \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 + 2a_{11}^{(k)} & 0 \\ 0 & I - 2\bar{A}_k \end{bmatrix}$ $(i \leqslant k \leqslant n)$，和号里共有 2^{n-i+1} 项. 记 $B_k = \begin{bmatrix} 1 - b_k & \beta_k \\ \beta_k' & B_{kk} \end{bmatrix}$，这里 b_k 取 $4a_{11}^{(k)}$ 或 $-2a_{11}^{(k)}$. 令

$$C_i = \begin{bmatrix} 1 - b_i & \beta_i \\ \beta_i' & B_{ii} \end{bmatrix}, \quad C_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 - b_{i+1} & \beta_{i+1} \\ \mathrm{sgn}(\beta_i\beta'_{i+1}) & B_{i+1,i+1} \end{bmatrix},$$

$$c_k = eB_i\cdots B_ke', \quad d_k = eC_i\cdots C_ke'.$$

记 $eC_i\cdots C_k = (d_k, \gamma_k)$，再令 $C_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 - b_{k+1} & \dfrac{c_k}{d_k}\beta_{k+1} \\ \mathrm{sgn}(\gamma_k\beta'_{k+1})\beta_{k+1} & B_{k+1,k+1} \end{bmatrix}$ 由 C_k 的构造易知 $\left\| \dfrac{c_k}{d_k} \right\| \leqslant 1$，由引理 4 知 $\| C_k \| \leqslant \max(1, 1 + 2a_{11}^{(k)}) = 1 + 2a_{11}^{(k)}$. 若记

$$eC_i\cdots C_n = ((1 - b_i)\cdots(1 - b_n) + \delta_{in}, *),$$

则有

$$(1 - b_i)\cdots(1 - b_n) + \delta_{in} \leqslant \prod_{k=i}^{n}(1 + 2a_{11}^{(k)}),$$

并且由 C_k 的构造可知 $\delta_{in} \geqslant 0$. 从而可得

$$0 \leqslant \delta_{in} \leqslant \prod_{k=i}^{n}(1 + 2a_{11}^{(k)}) - (1 - b_i)\cdots(1 - b_n) \leqslant \prod_{k=i}^{n}(1 + 2a_{11}^{(k)}) - \prod_{k=i}^{n}(1 - 4a_{11}^{(k)}). \tag{2.2}$$

记 $eB_i\cdots B_n = ((1 - b_i)\cdots(1 - b_n) + \delta'_{in}, *)$，再由 C_k 的构造可知 $|\delta'_{in}| \leqslant \delta_{in}$，由此及(2.2)以及 b_k 的取法可得

$$eB_i\cdots B_ne' \geqslant (1 - b_i)\cdots(1 - b_n) - \left(\prod_{k=i}^{n}(1 + 2a_{11}^{(k)}) - \prod_{k=i}^{n}(1 - 4a_{11}^{(k)})\right)$$

$$\geqslant 2\prod_{k=i}^{n}(1 - 4a_{11}^{(k)}) - \prod_{k=i}^{n}(1 + 2a_{11}^{(k)}).$$

从而由(2.1)和上式可得

$$e(I-A_i)\cdots(I-A_n)e' \geqslant \frac{2^{n-i+1}}{2^{n-i+1}}\left(2\prod_{k=i}^{n}(1-4a_{11}^{(k)})\prod_{k=i}^{n}(1+2a_{11}^{(k)})\right)\to 1(i\to\infty).$$

即得引理 5.

定理的证明　若不然，由引理 1，存在一单位向量 X_0，使 $\sum_{i=1}^{\infty} X_0 A_i X'_0$ 收敛. 从而存在正交矩阵 P，使 $X_0=(1,0)P$. 令 $B_i=PA_iP'$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} b_{11}^{(i)}$ 收敛. 其中 $b_{11}^{(i)}=eB_ie'$. 由引理 5 知 $\lim_{n>m0\to\infty} e(I-B_n)\cdots(I-B_{m0})^2\cdots(I-B_n)e'=1$，而

$$(I-A_n)\cdots(I-A_{m0})^2\cdots(I-A_n)=P'(I-B_n)\cdots(I-B_{m0})^2\cdots(I-B_n)P.$$

这意味着存在向量 ep，有 $\lim_{n>m0\to\infty} ep(I-A_n)\cdots(I-A_{m0})^2\cdots(I-A_n)p'e=1$，这与渐近稳定矛盾.

致谢　在本文的完成过程中，曾得到了导师陈翰馥研究员、郭雷研究员的悉心指导，在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

1　郭雷. 时变随机系统. 长春：吉林科学技术出版社，1993

2　Guo, L. and Lennart Ljung. Exponential stability of general tracking algorithms. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995 AC-40 (8):1376－1387

A Further Necessary Condition for the Asymptotic Stability of Time Varying Systems

WANG Guanjun

(Institute of Systems Science, Academia Sinica·Beijing, 100080, PRC)

Abstract: In this paper, a necessary condition for the asymptotic stability of nonnegative definite linear systems is obtained. The result we get here is better than that given in[1].

Key words: stability; asymptotic stability; exponential stability

本文作者简介

王冠君　1967 年生. 1992 年在杭州大学获硕士学位. 现为中国科学院系统科学研究所博士生. 目前研究领域为时变随机系统的稳定性、估计及随机逼近理论.