第 14 卷第 4 期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 4
1997 年 8 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Aug., 1997

离散不确定控制系统的鲁棒性分析与设计

王耀青　刘　微

(华中理工大学动力系·武汉, 430074)

摘要: 本文在文献[4]的基础上研究了一类离散不确定系统的状态反馈控制问题. 文中通过将系统的鲁棒控制器解存在的充分条件转化为一类极小极大的优化命题, 然后再通过确定系统的最优解, 给出了一种简便而有效的确定极大鲁棒稳定界的方法. 从而克服了设计鲁棒控制器所存在的保守性. 利用文中的结果还可以将系统的状态反馈系数矩阵的增益设计到最小的程度.

关键词: 不确定系统; 鲁棒控制器; 优化; 鲁棒稳定界

1 问题的提法

考虑一类具有不确定参数的离散型线性系统

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)=(A_0+\Delta A(r))x(k)+(B_0+\Delta B(s))u(k) \tag{1}$$

的鲁棒控制器设计中的若干问题, 式中

$$\Delta A(r)=\sum_{i=1}^{\rho} r_iA_i,\quad |r_i|\leqslant \bar{r}_i,\quad i=1,2,\cdots,\rho, \tag{2a}$$

$$\Delta B(s)=\sum_{j=1}^{l} s_jB_j,\quad |s_j|\leqslant \bar{s}_j,\quad j=1,2,\cdots,l, \tag{2b}$$

$x\in\mathbb{R}^n, u\in\mathbb{R}^m$; $A_0, \Delta A(r), B_0, \Delta B(s)$ 均为适当维数的矩阵, $r\in\mathbb{R}^\rho$ 和 $s\in\mathbb{R}^l$ 为不确定参数矢量, $\bar{r}_i$ 和 $\bar{s}_j$ 分别为 r_i 和 s_j 的极大界. 并假定对于任意的 r_i, s_j, 矩阵对 $[A, B]$ 可控. 本文将研究在什么条件下状态反馈控制器

$$u(k)=-Kx(k) \tag{3}$$

使得闭环控制系统

$$x(k+1)=(A-BK)x(k) \tag{4}$$

是鲁棒稳定的; 同时还研究如何设计状态反馈控制器(3) 的问题.

对这类问题进行研究的方法很多, 如文献[1]～[3], 特别是在文献[4]中给出的方法, 它不但使得具有不确定参数系统的鲁棒控制器设计问题变得系统化, 而且克服了鲁棒控制器设计过程中所普遍存在的保守性, 从而使得设计具有最小增益鲁棒控制器成为可能. 但是, 上述所提到的方法均是以连续时间系统为研究对象的, 由于连续时间系统和离散时间系统控制问题的鲁棒性分析与设计具有很大的差别, 随着计算机控制技术的高速发展, 从工业过程控制的实际问题出发, 对离散时间系统控制方法的研究更显得尤为重要. 所以, 本文将以离散型不确定系统作为问题研究的基础, 在文献[4]的基础上研究由(1)～(4) 所描述的一类控制问题. 研究内容包括: 1) 确定系统稳定的充分条件; 2) 求解不确定参数 r_i 和 s_j 的极大鲁棒稳定界 $\bar{r}_i$ 和 $\bar{s}_j$; 3) 设计具有最小反馈增益的状态反馈控制器.

2 鲁棒性分析与鲁棒稳定界

定义 1 如果(3) 使得系统(4) 稳定, 则称(3) 是系统(1) 的鲁棒稳定控制器.

本文于 1994 年 12 月 14 日收到. 1996 年 12 月 30 日收到修改稿.

定理 1 (3)是系统(1)的鲁棒稳定控制器的充分条件是存在对称非负定矩阵 Q_0 以及离散型代数 Riccati 矩阵方程

$$P = A_0^{\mathrm{T}}PA_0 - A_0^{\mathrm{T}}PB_0(R + B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}PA_0 + Q_0 \tag{5}$$

的唯一对称正定解 P 满足

$$\begin{aligned} Q_0 - [\Delta A^{\mathrm{T}}PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta A + (\Delta BK)^{\mathrm{T}}P\Delta BK] \\ + [(\Delta BK)^{\mathrm{T}}PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P\Delta BK + (\Delta BK)^{\mathrm{T}}P\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta BK] \geqslant 0. \end{aligned} \tag{6}$$

式中 $\Delta A = \Delta A(r), \Delta B = \Delta B(s), R > 0$,且 A_c 定义为

$$A_c = (A_0 - B_0K); \tag{7a}$$

$$K = (R + B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}PA_0. \tag{7b}$$

证 将 Q_0 代入(5)式,经整理得

$$P - (A - BK)^{\mathrm{T}}P(A - BK) - K^{\mathrm{T}}RK \geqslant 0. \tag{8}$$

因此,当 K 由(7b)式定义时,$(A - BK)$ 是稳定的.(3)式是系统(1)的鲁棒稳定控制器.

定理 2 (3)是系统(1)的鲁棒稳定控制器的充分条件是存在对称非负定矩阵 Q_0 以及方程(5)的解 P 满足

$$Q_0 - \frac{\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l}{1 + \varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l}P - T_1(P,\varepsilon) - T_2(P,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{9}$$

式中

$$T_1(P,\varepsilon) = \frac{1 + 4\varepsilon_1}{\varepsilon_1(1 + \varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i,$$

$$T_2(P,\varepsilon) = K^{\mathrm{T}}\Big[\frac{1 + 4\varepsilon_2}{\varepsilon_2(1 + \varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)}\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i - \frac{\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l}{1 + \varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l}R\Big]K,$$

$\varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$,$\varepsilon_1$ 和 ε_2 为任意的正常数.

证 对于任意的正常数 ε_1 和 ε_2,由于

$$\Delta A^{\mathrm{T}}PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P\Delta A \leqslant \varepsilon_1^{-1}\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i + \varepsilon_1\rho A_c^{\mathrm{T}}PA_c,$$

$$(\Delta BK)^{\mathrm{T}}PA_c + A_c^{\mathrm{T}}P\Delta BK \leqslant \varepsilon_2^{-1}K^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\Big)K + \varepsilon_2 lA_c^{\mathrm{T}}PA_c,$$

$$(\Delta BK)^{\mathrm{T}}P\Delta A + \Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta BK \leqslant (\Delta BK)^{\mathrm{T}}P\Delta BK + \Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta A,$$

$$(\Delta BK)^{\mathrm{T}}P\Delta BK + \Delta A^{\mathrm{T}}P\Delta A \leqslant 2\Big[\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i + K^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\Big)K\Big].$$

所以,方程(6)成立的充分条件是

$$Q_0 \geqslant (4 + \varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i + (\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)A_c^{\mathrm{T}}PA_c + (4 + \varepsilon_2^{-1})K^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\Big)K. \tag{10}$$

另一方面,方程(5)经整理得

$$-A_c^{\mathrm{T}}PA_c = Q_0 + K^{\mathrm{T}}RK - P. \tag{11}$$

将方程(11)代入方程(10)得

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)Q_0 + (\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)K^{\mathrm{T}}RK - [(\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2 l)P \\ + (4 + \varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i + (4 + \varepsilon_2^{-1})K^{\mathrm{T}}\Big(\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\Big)K] \geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

显然方程(12)成立的充分条件是方程(9).定理 2 为真.

定义 2 对于给定的$\bar{r}_i$和$\bar{s}_j$，若控制器(3)使得闭环控制系统(4)是鲁棒稳定的，则称$\bar{r}=\max\{\bar{r}_i,i=1,2,\cdots,\rho\},\bar{s}=\max\{\bar{s}_j,j=1,2,\cdots,l\}$为鲁棒稳定界.

推论 1 当$(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)\to\infty$或$(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)\to 0$时，系统的鲁棒稳定界趋于零.

推论 2 对于任意给定的矩阵Q_0和R，总存在$\bar{r}>0,\bar{s}>0$使得方程(9)为真.

由推论2可知，无论矩阵Q_0和R取何值，使(9)式成立的$\bar{r}>0,\bar{s}>0$总存在. 关键是$\bar{r}$和$\bar{s}$究竟有多大的问题. 为了求得尽可能大的$\bar{r}$和$\bar{s}$，先给出如下结论：

推论 3 如果存在对称正定矩阵$\tilde{Q}$和R使得离散型代数 Riccati 矩阵方程

$$P=\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0-\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}PB_0(R+B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0+(1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)\tilde{Q} \tag{13}$$

的唯一对称正定解P满足

$$R-(1+4\varepsilon_2)(\varepsilon_1\varepsilon_2\rho+\varepsilon_2^2 l)^{-1}\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\geqslant 0, \tag{14}$$

式中$\tilde{A}_0=(1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)^{1/2}A_0$，则控制器(3)是系统(1)的鲁棒稳定控制器的充分条件是

$$\tilde{Q}-T_1(P,\varepsilon)\geqslant 0. \tag{15}$$

证 由(13)式得

$$P=A_0^{\mathrm{T}}PA_0-A_0^{\mathrm{T}}PB_0(R+B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}PA_0+\frac{\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l}{1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l}P+\tilde{Q}. \tag{16}$$

定义$Q_0=\dfrac{\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l}{1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l}P+\tilde{Q}>0$，(因为$\tilde{Q}>0,P>0$)，当(15)式成立时有

$$Q_0-(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)(1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)^{-1}P-T_1(P,\varepsilon)\geqslant 0. \tag{17}$$

如果(13)式的解P使得(14)式成立，则由(14)和(17)式可知(9)式成立，其中矩阵P为方程(13)的解，也是方程(5)和(16)的解. 因此，(3)式是系统(1)的鲁棒稳定控制器. 证毕.

定理 3 (3)是系统(1)的鲁棒稳定控制器的充分条件是存在对称正定矩阵$\bar{Q}$和R使得离散型代数 Riccati 矩阵方程

$$P=\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0-\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}PB_0(R+B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0+\bar{Q} \tag{18}$$

的唯一对称正定解P满足

$$R-\frac{1+4\varepsilon_2}{\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)}\sum_{i=1}^{l}\bar{s}_i^2B_i^{\mathrm{T}}PB_i\geqslant 0, \tag{19a}$$

$$\bar{Q}-(4+\varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2A_i^{\mathrm{T}}PA_i\geqslant 0. \tag{19b}$$

证 利用推论3，定义矩阵变换$\bar{Q}=(1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)\tilde{Q}$即可证明.

考虑到$\bar{Q}$的可优化参数通常比R多，本文将假设矩阵R给定. 此外，由于方程

$$\bar{Q}-\bar{r}^2T_0(P,\varepsilon_1)\geqslant 0, \tag{20a}$$

$$T_0(P,\varepsilon_1)=(4+\varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{\rho}A_i^{\mathrm{T}}PA_i \tag{20b}$$

成立是方程(19)成立的充分条件，因此，根据方程(20)可以得到以下优化命题：

$$\begin{cases}\min\limits_{Q_1,\varepsilon_1}J=\min\limits_{Q_1,\varepsilon_1}\lambda_{\max}[Q_1^{-\mathrm{T}}T_0(P,\varepsilon_1)Q_1^{-1}]=\min\limits_{Q_1,\varepsilon_1}\lambda_{\max}[M], & (21a)\\ \text{s.t. } P=\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0-\tilde{A}_0^{\mathrm{T}}PB_0(R+B_0^{\mathrm{T}}PB_0)^{-1}B_0^{\mathrm{T}}P\tilde{A}_0+\bar{Q},\quad \bar{Q}=Q_1^{\mathrm{T}}Q_1. & (21b)\end{cases}$$

根据上述所给出的优化命题，系统(1)的鲁棒稳定界$\bar{r}$和$\bar{s}$分别为

$$\bar{r}=J^{-\frac{1}{2}};\quad \bar{s}=\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)}{1+4\varepsilon_2}\Big[\lambda_{\max}(R^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{l}B_i^{\mathrm{T}}P^*B_iR^{-\frac{1}{2}})\Big]^{-\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

当$\bar{r}_i\leqslant\bar{r}$时，条件(19b)成立. 如果能够求出一个只与$T_0(P,\varepsilon_1)$有关的最小解$P^*$，则将$P^*$代

入条件(19a)，就可以进一步求得具有极大值特性的 $\bar{s}$. 当 $\bar{s}_j \leqslant \bar{s}$ 时，条件(19a)成立. P^* 的求解将是下一节研究的内容. 为了书写方便起见，定义 $\mu_1 = (4+\varepsilon_1^{-1})$. 若运用梯度法解优化问题(21)，我们有如下结论：

定理 4 在方程(21)中，目标函数 J 关于变量 Q_1 和 ε_1 的一阶梯度函数分别为

1) $\partial J/\partial Q_1 = Q_1 V - 2(4+\varepsilon_1^{-1})Q_1^{-\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{p} A_i^{\mathrm{T}} P A_i Q_1^{-1} v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}}$,

2) $\partial J/\partial \varepsilon_1 = v_m^{\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{p} [(4+\varepsilon_1^{-1})A_i^{\mathrm{T}} V_1 A_i - \varepsilon_1^{-2} A_i^{\mathrm{T}} P A_i] v_m, \quad \varepsilon_1 > 0.$

式中矩阵 V 和 V_1 分别满足离散型代数 Lyapunov 矩阵方程

$$V = \bar{A}_c V \bar{A}_c^{\mathrm{T}} + 2(4+\varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{p} A_i Q_1^{-1} v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

$$V_1 = \bar{A}_c V_1 \bar{A}_c^{\mathrm{T}} + \bar{A}_0^{\mathrm{T}}(P^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}})^{-1}\bar{A}_0, \quad \bar{A}_c = \bar{A}_0 - B_0 K, \tag{24}$$

v_m 是$[Q_1^{-\mathrm{T}} T_0(P,s) Q_1^{-1}]$ 属于其最大特征值 $\lambda_{\max}[Q_1^{-\mathrm{T}} T_0(P,\varepsilon_1) Q_1^{-1}]$ 的右特征矢量.

证 根据 J 以及特征值和特征矢量的定义，J 可以表示为

$$J = v_m^{\mathrm{T}}[Q_1^{-\mathrm{T}} T_0(P,\varepsilon_1) Q_1^{-1}] v_m. \tag{25}$$

当矩阵 Q_1 具有增量 ΔQ_1 时，J 的增量 ΔJ 可以表示为

$$\Delta J = (v_m + \Delta v_m)^{\mathrm{T}}(Q_1 + \Delta Q_1)^{-\mathrm{T}} T_0(P + \Delta P, \varepsilon_1)(Q_1 + \Delta Q_1)^{-1}(v_m + \Delta v_m) - J. \tag{26}$$

当 ΔQ_1 充分小时，我们有

$$(v + \Delta v_m)^{\mathrm{T}}(M + \Delta M)(v + \Delta v_m) \approx v_m^{\mathrm{T}}(M + \Delta M) v_m. \tag{27}$$

且$(Q_1 + \Delta Q_1)^{-1}$的展开式可以表示为

$$(Q_1 + \Delta Q_1)^{-1} = Q_1^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}(-\Delta Q_1 Q_1^{-1})^i. \tag{28}$$

将(27)和(28)式代入(26)式，ΔJ 关于矩阵 ΔQ_1 和 ΔP 的一阶线性近似为

$$\begin{aligned}\Delta J \approx{}& \mu_1 v_m^{\mathrm{T}}[Q_1^{-T}\sum_{i=1}^{p} A_i^{\mathrm{T}} \Delta P A_i Q_1^{-1} - Q_1^{-\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{p} A_i^{\mathrm{T}} P A_i Q_1^{-1} \Delta Q_1 Q_1^{-1} \\ & - Q_1^{-\mathrm{T}} \Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{p} A_i^{\mathrm{T}} P A_i Q_1^{-1}] v_m = \mathrm{tr}[F_1 \Delta P - F_2 \Delta Q_1],\end{aligned} \tag{29}$$

式中

$$F_1 = \mu_1 \sum_{i=1}^{p} A_i Q_1^{-1} v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}, \quad F_2 = 2\mu_1 Q_1^{-1} v_m v_m^{\mathrm{T}} Q_1^{-\mathrm{T}} \sum_{i=1}^{p} A_i^{\mathrm{T}} P A_i Q_1^{-1}.$$

另一方面，利用(28)式的基本形式，(22b)式的增量方程以及它的解可以分别表示为

$$\Delta P = \bar{A}_c^{\mathrm{T}} \Delta P \bar{A}_c + \Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1^{\mathrm{T}} \Delta Q_1, \tag{30}$$

$$\Delta P = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{A}_c^{\mathrm{T}})^k (\Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1 + Q_1^{\mathrm{T}} \Delta Q_1) \bar{A}_c^k. \tag{31}$$

由于 $\bar{A}_c$ 是稳定的，所以，矩阵 ΔP 是有界的. 将(30)式代入(29)式得

$$\begin{aligned}\Delta J &\approx \mathrm{tr}\{\sum_k F_1 (\bar{A}_c^{\mathrm{T}})^k (\Delta Q_1^{\mathrm{T}} Q_1^{\mathrm{T}} + Q_1^{\mathrm{T}} \Delta Q_1) \bar{A}_c^k - F_2 \Delta Q_1\} \\ &= \mathrm{tr}\{[2\sum_k \bar{A}_c^k F_1 (\bar{A}_c^{\mathrm{T}})^k Q_1^{\mathrm{T}} - F_2] \Delta Q_1\} = \mathrm{tr}[V Q_1^{\mathrm{T}} - F_2) \Delta Q_1].\end{aligned} \tag{32}$$

由此可以证明结论 1). 结论 2)可以仿照上面的证明过程进行. 在此略.

3 最小解 P^* 的确定

由上一节的分析可知，当(20)式成立，且当 $\bar{r}_i \leqslant \bar{r}, \bar{s}_i \leqslant \bar{s}$ 时，(19)式成立. 定义矩阵

$$\hat{Q} = \overline{Q} - T_3(P,\varepsilon), \quad T_3(P,\varepsilon) = (4+\varepsilon_1^{-1})\sum_{i=1}^{\rho}\bar{r}_i^2 A_i^{\mathrm{T}} P A_i.$$

将 $\overline{Q}$ 代入方程(21b)得

$$P = \widetilde{A}_0^{\mathrm{T}} P \widetilde{A}_0 - \widetilde{A}_0^{\mathrm{T}} P B_0 (R + B_0^{\mathrm{T}} P B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P \widetilde{A}_0 + \hat{Q} + T_3(P,\varepsilon). \tag{33}$$

由于 $\hat{Q} \neq 0$，意味着 $\hat{Q}$ 的某种范数有可能很大，从而可能导致(5)式或(33)式的解具有很大范数. 这样不但增加了控制能量，而且达不到极大 $\bar{s}$ 的目的. 这个部分将研究 P^* 的解法.

定义 3　若(33)具有唯一对称非负定解 P，则称 $Q=0$ 时的解是(33)的最小解，记为 P^*. 我们之所以这样定义(33)式的最小解是因为 P^* 将只与 $T_3(P,\varepsilon)$ 有关.

定理 5　假定方程(5)具有唯一对称正定解 $\widetilde{P}$，则方程(33)的解 P^* 可以通过迭代方程

$$\begin{cases} P_k = A_0^{\mathrm{T}} P_{k-1} A_0 - A_0^{\mathrm{T}} P_{k-1} B_0 (R + B_0^{\mathrm{T}} P_{k-1} B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{k-1} A_0 + T(P_{k-1},\varepsilon), \\ P_{-1} = \widetilde{P}, \quad k = 0,1,\cdots \end{cases} \tag{34}$$

来求得，且 $P^* = \lim\limits_{k\to\infty} P_k$. 其中 $T(P,\varepsilon) = (1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)^{-1}[(\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)P + T_3(P,\varepsilon)]$.

证　由于矩阵 P_{-1} 是(33)式的唯一对称正定解，所以，P_{-1} 满足

$$P_{-1} = A_0^{\mathrm{T}} P_{-1} A_0 - A_0^{\mathrm{T}} P_{-1} B_0 (R + B_0^{\mathrm{T}} P_{-1} B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P_{-1} A_0 + \hat{Q}_0 + T(P_{-1},\varepsilon). \tag{35}$$

当 $k=0$ 时，由于 $Q_0 = (1+\varepsilon_1\rho+\varepsilon_2 l)^{-1}\hat{Q} \geqslant 0$，所以，由(34)式求得的 P_0 满足 $P_0 \leqslant P_{-1}$. 对(34)式进行变换得

$$\begin{aligned} P_k = {} & A_c^{\mathrm{T}}(k)(P_k^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}}) \\ & \cdot (P_{k-1}^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}})^{-1} (P_k^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}}) A_c(k) + T(P_{k-1},\varepsilon). \end{aligned} \tag{36}$$

利用数学归纳法，令 $k=i, i=0,1,\cdots$，当 $P_i \leqslant P_{i-1}$ 时，由于

$$(P_{i-1}^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}})^{-1} \geqslant (P_i^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}})^{-1}, \quad T(P_{i-1},\varepsilon) \geqslant T(P_i,\varepsilon), \tag{37}$$

利用方程(37)，由方程(36)可以得到

$$\begin{aligned} P_i & \geqslant A_c^{\mathrm{T}}(i)(P_i^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}}) A_c(i) + T(P_{i-1},\varepsilon) \\ & \geqslant A_c^{\mathrm{T}}(i)(P_i^{-1} + B_0 R^{-1} B_0^{\mathrm{T}}) A_c(i) + T(P_i,\varepsilon) \\ & = P_{i+1}. \end{aligned} \tag{38}$$

由此可见，矩阵序列 $\{P_k, k=0,1,\cdots\}$ 是收敛的. 所以，定理 5 为真.

由于 P^* 的确定，我们不但能求得不确定系统的最大鲁棒稳定界 $\bar{r}$ 和 $\bar{s}$，而且还可以在 $\bar{r}_i \leqslant \bar{r}, i=1,2,\cdots,\rho$；$\bar{s}_i \leqslant \bar{s}, i=1,2,\cdots,l$，的条件下求得具有最小反馈增益的控制器[4].

$$u(k) = -Kx(k) = -(R + B_0^{\mathrm{T}} P^* B_0)^{-1} B_0^{\mathrm{T}} P^* A_0 x(k). \tag{39}$$

4　算　例

考虑线性系统 $x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -0.56+e_1 & 1.5+e_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} e_3 \\ 1.0 \end{bmatrix} u(k)$，式中 $e_i, i=1,2,3$ 为不确定参数. 取初始值 $Q_1 = I, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$，(步长)$h = 0.0005$. 此时，$\hat{J} = 69.4233$，

$$T_0(P,\varepsilon) = \begin{bmatrix} 69.4233 & 0.0 \\ 0.0 & 69.4233 \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 2.1701 & -2.7243 \\ -2.7243 & 13.8847 \end{bmatrix}.$$

经过 78 次迭代运算得一局部极值 $J = 30.5103, \bar{r} = 0.1811, \bar{s} = 0.02879, T_0(P,\varepsilon) = \mathrm{diag}(5682.9650 \quad 5682.9650)$，

$$P = \begin{bmatrix} 189.6122 & 18.5357 \\ 18.5357 & 941.5138 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 12.8951 & -5.1674 \\ -4.7322 & 18.5337 \end{bmatrix},$$

将上述结果代入方程(34)得最小解$P^* = \begin{bmatrix} 8.6856 & -2.3455 \\ -2.3455 & 39.2890 \end{bmatrix}$, $\bar{s} = 0.1345$. 由此可见,通过求极小解P^*可使$\bar{s}$增大4.6717倍. 当$|e_i| \leqslant 0.18104$, $i = 1,2$; $|e_3| \leqslant 0.1345$时,控制器(39)使该系统稳定.

参考文献

1 Peterson, I. R. and Hollot, C. V.. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. Automatica, 1986, 22(4):397-411

2 Schmitendorf, W. E.. Designing stabilizing controllers for uncertain systems using the riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33(4):376-379

3 Kosmidou, O. I. and Bertrand, P.. Robust controller design for systems with large parameter variation. Int. J. Control, 1987, 45(3):927-938

4 王耀青. 具有最小增益最优鲁棒控制器的设计. 控制理论与应用, 1995, 12(3):290-296

Analysis of Robustness for a Class of Discrete Uncertain Control Systems

WANG Yaoqing and LIU Wei

(Department of Power Enginnering, Huazhong University of Science Technology · Wuhan, 430074 PRC)

Abstract: In this paper, the problem of state feedback control for a class of discrete uncertain systems is studied based on the reperence [4]. A simple and efficient algorithmic procedure for determining maximal robust stable bounds is proposed *via* transforming the sufficient conditions for designing an optimal robust controller for systems with uncertain parameters to an equivalent min-max optimization problem. To overcome the problem of conservative in the design of robust controller, an iterative procedure is also given for obtaining the minimal solution related to the maximal robust stable bounds.

Key words: uncertain systems; robust controller; optimization; robust stable bounds

本文作者简介

王耀青 1961年生. 华中理工大学动力系. 主要研究兴趣:最优控制,鲁棒控制器分析与设计,电厂计算机控制与仿真.

刘 微 1974年生. 华中理工大学动力系. 主要研究兴趣:电厂计算机控制与仿真.