第14卷第4期 控制理论与应用 Vol. 14, No. 4
1997年8月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Aug., 1997

多变量连续预测控制的动态补偿*

刘 兵 徐立鸿 冯纯伯
(东南大学自动化研究所·南京,210096)

摘要:本文利用多变量系统的频域设计方法——特征结构分解,将多变量系统分解为一组独立的 SISO 特征子系统,对各特征子系统,通过加权补偿,由极点配置保证闭环特征子系统稳定,进而保证原闭环系统渐近稳定.

关键词:多变量连续预测控制;极点配置;特征结构分解

1 引 言

对连续系统,Demircioglu 和 Gawthrop 提出 CGPC 算法[1],随后将 CGPC 自然地推广到多变量系统(MCGPC)[2].由于 MCGPC 的矩阵维数成倍增大,计算量大大增加.同时 MCGPC 和 CGPC 一样,不能保证闭环系统的稳定性.对离散系统,Lelic 等将预测控制和极点配置方法相结合,保证闭环系统的稳定性[3].对连续系统,还没有相应的结果.

本文利用多变量系统的频域设计方法——特征结构分解,将多变量系统分解为一组独立的 SISO 特征子系统.对各特征子系统,通过加权量强调当前控制量的作用,由极点配置保证闭环特征子系统稳定,进而保证原闭环系统渐近稳定.

2 特征结构分解及特征子系统的预测控制算法

假设系统的输入输出模型为

$$y(s)=G(s)u(s). \tag{1}$$

其中 $y(s)$,$u(s)$ 分别为系统的 n 维输出和输入,$G(s)$ 为系统 $n\times n$ 维传递函数矩阵.仿[4,5]方法,在 s 平面上除分支点(即使得特征向量平行的点)外,$G(s)$ 可表示为

$$G(s)=W(s)\Lambda(s)V(s),\text{并且 }W(s)V(s)=I. \tag{2}$$

其中 $W(s)$,$V(s)$ 分别为 $G(s)$ 的右特征向量函数矩阵和左特征向量函数矩阵,$\Lambda(s)$ 为 $G(s)$ 的对角特征传递函数矩阵.令 $\tilde{y}(s)=V(s)y(s)$,$\tilde{u}(s)=V(s)u(s)$ 分别为输出、输入在特征子空间上的投影.由式(1)和式(2)得

$$\tilde{y}(s)=\Lambda(s)\tilde{u}(s), \tag{3}$$

由式(3)可知,系统(1)转化为 n 个独立的 SISO 特征子系统,下面利用极点配置方法保证闭环特征子系统稳定.

由式(3),将第 i 个特征子系统描述为

$$A_i(s)\tilde{y}_i(s)=B_i(s)\tilde{u}_i(s)+C_i(s)\tilde{e}_i(s). \tag{4}$$

其中 $\dfrac{A_i(s)}{B_i(s)}$ 为 $G(s)$ 的第 i 个特征传递函数,并且 $A_i(s)$,$B_i(s)$ 互素;$\tilde{u}_i(s)$,$\tilde{y}_i(s)$ 分别为特征子系统的输入、输出,$\tilde{e}_i(s)$ 为零均值的白噪声,$C_i(s)$ 一般由第 i 个特征子系统的干扰特性决定的待设计多项式,这里假设 $C_i(s)$ 是和 $A_i(s)$ 同阶稳定的多项式.假设 n 维向量 $w(s)$ 为 $y(s)$ 跟踪参考向量,$\tilde{w}(s)=V(s)w(s)$ 为 $w(s)$ 在特征子空间上的投影.

---

* 国家自然科学基金和河南省教委自然科学基金资助项目.
本文于1995年6月17日收到.1996年6月28日收到修改稿.

为书写简洁，下面的推导过程将省略下标"i". 连续特征子系统在时域内超前 T 时刻的输出预测值为 $y(t+T)$，其对应的Laplase变换为 $e^{sT}y(s)$，e^{sT} 可近似为 $e^{sT}=\sum_{k=0}^{N_y}\frac{T^k}{k!}s^k$，其中 N_y 为Taylor展开截取项数. 因此有

$$p(s)\mathscr{L}(\tilde{y}(t+T))=p(s)e^{sT}y(s)=p(s)\tilde{y}(s)+\sum_{k=1}^{N_y}\frac{T^k}{k!}s^k p(s)\tilde{y}(s). \tag{5}$$

其中 $p(s)$ 为辅助输出而设定的多项式并且 $p(0)=1$. 令

$$s^k p(s)C(s)=A(s)E_k(s)+F_k(s),\quad k=1,2,\cdots,N_y, \tag{6}$$

$$E_k(s)B(s)=C(s)H_k(s)+G_k(s),\quad k=1,2,\cdots,N_y. \tag{7}$$

其中 $\partial E_k(s)=\partial p(s)+k, \partial F_k(s)=\partial A(s)-1, \partial H_k(s)=\partial p(s)+k-\rho, \partial G_k(s)=\partial A(s)-1$，$\rho$ 为第 i 个特征子系统的相对阶. $\partial(\cdot)$ 表示$(\cdot)$ 的次数.

由式(6)、式(7) 和式(4)，整理式(5) 得

$$p(s)\mathscr{L}(\tilde{y}(t+T))=T_{N_y}[H(s)\tilde{u}(s)+Y^0(s)]+p(s)\tilde{y}(s)+T_{N_y}E(s)\tilde{e}(s). \tag{8}$$

其中

$$T_{N_y}=\left[1,T,\cdots,\frac{T^{N_y}}{N_y!}\right],\quad H(s)=[0,H_1(s),\cdots,H_{N_y}(s)]^{\mathrm{T}},$$

$$E(s)=[0,E_1(s),\cdots,E_{N_y}(s)]^{\mathrm{T}},\quad Y^0(s)=[0,y_1^0(s),\cdots,y_{N_y}^0(s)]^{\mathrm{T}},$$

$$y_k^0(s)=(G_k(s)\tilde{u}(s)+F_k(s)\tilde{y}(s))/C(s).$$

定义　N_u 为第 i 个特征子系统的控制阶(control order)，令其满足

$$s^k\tilde{u}(s)=0,\quad 任意\ k>N_u. \tag{9}$$

由约束条件式(9) 有 $H(s)\tilde{u}(s)=H\tilde{U}, \tilde{U}=[1,s,\cdots,s^{N_{u0}}]^{\mathrm{T}}\tilde{u}(s), N_{u0}=\min\{N_u,\partial p(s)+N_y-\rho\}$，$H$ 为$(N_y+1)\times(N_{u0}+1)$ 阶准下三角矩阵，其元素为 $H_k(s)$ 相应的系数. 因此式(8) 变为

$$p(s)\mathscr{L}(\tilde{y}(t+T))=T_{N_y}[H\tilde{U}+Y^0(s)]+p(s)\tilde{y}(s)+T_{N_y}E(s)\tilde{e}(s). \tag{10}$$

式(10) 中辅助输出 $p(s)\mathscr{L}(\tilde{y}(t+T))$ 对应的时域表示为 $\tilde{y}_a(t+T)$，

$$\tilde{y}_a(t+T)=T_{N_y}[HU^*+Y^0(t)]+p(s)\tilde{y}(t)+T_{N_y}E(s)\tilde{e}(t). \tag{11}$$

其中 $Y^0(t),U^*$ 分别对应于 $Y^0(s),\tilde{U}$ 的时域表示.

取指标函数为

$$J(N_1,N_2,N_c)=E\left\{\int_{N_1}^{N_2}[(\tilde{y}_a(t+T))-p(s)\tilde{y}(t))-T_{N_y}R(s)r(\tilde{w}(t)-\tilde{y}(t))]^2\mathrm{d}T\right.$$
$$\left.+\int_0^{N_c}[\sqrt{\lambda}T_{N_{u0}}U^*+X(s)\tilde{u}(t)]^2\mathrm{d}T\right\}. \tag{12}$$

其中 N_1,N_2 分别为最小、最大预测时域，N_c 为控制时域，$R(s),X(s)$ 为待定的加权项，令 $X(s)=\frac{X_n(s)}{X_d(s)}$，$\lambda$ 为正的加权量，$r=[r_0,r_1,\cdots,r_{N_y}]^{\mathrm{T}}$ 为设定的第 i 个特征子系统的参考输入模型 $\frac{R_n(s)}{R_d(s)}$ 的前 N_y+1 个Markov参数构成的列向量，$T_{N_{u0}}=\left[1,T,\cdots,\frac{T^{N_{u0}}}{N_{u0}!}\right]$.

容易看出，当 $p(s)=1,R(s)=1,X(s)=0$ 时，式(12) 即是文[1] 中的情况. 说明本方法比[1] 更具一般性，并且为后面极点配置提供方便.

式(11) 代入式(12)，关于 U^* 优化，取 U^* 的第一个分量 $\tilde{u}(t)$，然后取 $\tilde{u}(t)$ 关于 t 的Laplase变换得

$$\tilde{u}(s)=mrR(s)[\tilde{w}(s)-\tilde{y}(s)]-mY^0(s)-hX(s)\tilde{u}(s). \quad (13)$$

其中 m 为 $(H^{\mathrm{T}}T_yH+\lambda T_u)^{-1}H^{\mathrm{T}}T_y$ 的第一行，h 为 $(H^{\mathrm{T}}T_yH+\lambda T_u)^{-1}\sqrt{\lambda}T_e$ 的第一行，$T_y=\int_{N_1}^{N_2}T_{N_y}^{\mathrm{T}}T_{N_y}\mathrm{d}T$，$T_u=\int_0^{N_c}T_{N_{u0}}^{\mathrm{T}}T_{N_{u0}}\mathrm{d}T$，$T_e=\int_0^{N_e}T_{N_{u0}}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}T$. 整理式(13)得

$$M_0(s)\tilde{u}(s)=I_0(s)\tilde{w}(s)-N_0(s)\tilde{y}(s). \quad (14)$$

其中 $M_0(s)=X_d(s)+mG^0(s)\dfrac{X_d(s)}{C(s)}+hX_n(s)$，$N_0(s)=mrR(s)X_d(s)+mF^0(s)\dfrac{X_d(s)}{C(s)}$，$I_0(s)=mrR(s)X_d(s)$，$G^0(s)=[0,G_1(s),\cdots,G_{N_y}(s)]^{\mathrm{T}}$，$F^0(s)=[0,F_1(s),\cdots,F_{N_y}(s)]^{\mathrm{T}}$.

由式(14)、式(4)得第 i 个闭环特征子系统

$$[A(s)M_0(s)+B(s)N_0(s)]\tilde{y}(s)=B(s)I_0(s)\tilde{w}(s)+C(s)M_0(s)\tilde{e}(s). \quad (15)$$

记 $P_c(s)$ 为第 i 个特征子系统的特征多项式. 将 $M_0(s)$，$N_0(s)$ 代入式(15)左边，整理得

$$P_c(s)=A(s)M_0(s)+B(s)N_0(s)=A_1(s)X_d(s)+B_1(s)X_n(s), \quad (16)$$

其中

$$A_1(s)=A(s)+mrR(s)B(s)+mD(s),\quad B_1(s)=hA(s),$$

$$D(s)=[0,D_1(s),\cdots,D_{N_y}(s)]^{\mathrm{T}},\quad D_k(s)=s^kB(s)p(s)-A(s)H_k(s).$$

由于 $A(s)$，$B(s)$ 互素，必有 $A_1(s)$，$B_1(s)$ 互素，则对任一期望稳定的特征多项式 $P_c(s)$，方程式(16)关于 $X_d(s)$，$X_n(s)$ 可解. 因此第 i 个闭环特征子系统稳定.

3 预测控制系统的渐近稳定性

由式(16)、式(15)知第 i 个闭环特征子系统稳定. 从理论上说，只要适当选择参数，使式(15)中 $P_{ci}(0)=B_i(0)I_{0i}(0)$ 成立，就可实现无差跟踪，但在 $P_{ci}(0)=B_i(0)I_{0i}(0)$ 约束下，求解式(16)关于 $X_{ni}(s)$，$X_{di}(s)$，$R_i(s)$ 的非线性方程是困难的，因此下面采用综合方法. 首先给定 $R_i(s)$（比如 $R_i(s)=1/(s+1)$），由式(16)求得 $X_{ni}(s)$，$X_{di}(s)\in\mathbb{R}\mathrm{H}^\infty$，然后在前置传递函数 $I_{0i}(s)$ 中增加一适当的比例增益或低通滤波环节，使得式(15)中 $P_{ci}(0)=B_i(0)I_{0i}(0)$ 成立，即有

$$\lim_{t\to\infty}(\tilde{y}_i(t)-\tilde{w}_i(t))=\lim_{s\to0}s(\tilde{y}_i(s)-\tilde{w}_i(s))=0. \quad (17)$$

也即有

$$\lim_{t\to\infty}(\tilde{y}(t)-\tilde{w}(t))=\lim_{s\to0}s(\tilde{y}(s)-\tilde{w}(s))=0. \quad (18)$$

由式(18)和式(2)得

$$\lim_{t\to\infty}(y(t)-w(t))=\lim_{s\to0}s(y(s)-w(s))=\lim_{s\to0}sW(s)(\tilde{y}(s)-\tilde{w}(s))=0, \quad (19)$$

因此通过加权补偿使得闭环系统渐近稳定.

4 结　论

本文通过特征结构分解，将多变量系统分解为一组独立的 SISO 特征子系统. 通过加权补偿，由极点配置保证闭环特征子系统稳定. 再通过对前置环节的再设计实现特征子系统的无差跟踪，进而保证原闭环系统渐近稳定.

参 考 文 献

1 Demircioglu, H. and Gawthrop, P. J.. Continuous-time generalized predictive control(CGPC). Automatica, 1991, 27 (1):55－74

2 Demircioglu, H. and Gawthrop, P. J.. Multivariable continuous-time generalized predictive control (MCGPC). Auto-

matica, 1992, 28(4):697—713

3 Lelic, M. A. and Zarrop, M. B.. Generalized pole-placement self-tuning controller, Part 2: basic algorithm. Int J Contrpl, 1987, 46(2):547—568

4 Cloud, D. J. and Kouvaritakis, B.. Characteristic decomposition and the multivariable generalisation of predictive self-Tuning control. IEE Pt-D, 1988, 135(3):165—181

5 吕剑虹,徐治皋,陈来九.特征结构下的一种多变量预测控制方法.自动化学报,1992,18(5):565—571

Dynamic Compensation for Multivariable Continuous-Time Predictive Control

LIU Bing, XU Lihong and FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University·Nanjing, 210096,PRC)

Abstract: This paper proposes a framework of dynamic compensation for multivariable continuous-time predictive control. Firstly, frequency analysis method of multivariable systems, characteristic decomposition, is used to reduce the multivariable systems to a set of independent SISO subsystems. Then the role of present control signal is stressed by weighting for every subsystem, the stability of closed-loop subsystem is guaranteed by pole-placement technique, so the asymptotic stability of original closed-loop system is ensured.

Key words: multivariable continuous-time predictive control; pole-placement; characteristic decomposition

本文作者简介

刘 兵 见本刊1997年第2期第183页.

徐立鸿 见本刊1997年第2期第183页.

冯纯伯 见本刊1997年第2期第183页.