

# 非线性控制系统的层次化与机械化

## ——关于新方向的探索

程代展 洪奕光 陈翰馥 秦化淑

(中国科学院系统科学研究所·北京, 100080)

**摘要:** 本文首先对非线性系统的几何理论作一回顾, 指出它的进展与目前的瓶颈所在. 然后提出一个大胆的设计: 通过对非线性控制系统的层次化结构分解与机械化的计算机实现, 发展现有的非线性系统的几何理论, 使非线性控制系统的模型有穷参数化, 从而为控制设计及工程应用提供一个便于用计算机实现的基本框架. 为实现理论上的突破, 本文提出三个新的理论工具: 微分动力学, 微分拓扑学与代数拓扑, 代数几何. 然后, 对每种工具在新模型框架下所起的作用及所要解决的问题进行粗线条的勾画, 并详细说明目前的进展与下一步的期望.

**关键词:** Whitney 拓扑; 正则型; 中心流形; 代数簇; 纤维丛

### 1 微分几何方法回顾

从70年代开始发展起来的微分几何(包括微分代数)方法<sup>[1~3]</sup>为非线性系统的控制理论找到了一个合适的工具, 从而大大促进了非线性控制理论的发展, 造成了从理论到应用的一次飞跃.

几何方法的最大优点是, 它将对微分流形的子流形的研究转换为对切空间的子分布的研究, 如将“能达子流形”与“能控性李代数”对应起来等. 用纤维丛的语言<sup>[4]</sup>来说, 一般地说, 状态流形与其切空间形成一个局部平凡丛, 因为切丛同胚于 $\mathbb{R}^n$ 空间, 研究切丛比研究状态空间本身方便的多, 因此, 几何方法对非线性系统的结构分析、分解及与结构有关的控制设计带来极大的方便. 线性化、解耦、零动力系统与反馈镇定等, 都是几何方法的直接应用.

近年来发展起来的 backstepping 方法<sup>[5]</sup>等都是非线性标准形下进行的, 它们或多或少可以看作几何方法的间接应用.

经历了近四分之一世纪的发展与繁荣, 几何方法现在似乎进入了萧条时期, 突破性的工作明显减少. 微分几何方法的一些局限性越来越明显地暴露出来了.

依笔者们的浅见, 微分几何方法有以下几个弱点: 1) 复杂性, 即使是一个可线性化或可解耦系统, 要检验其条件一般也是一件困难的事, 而反馈实现则更为困难. 例如, 状态反馈线性化实质上要解一组偏微分方程, 对一般系统这几乎是不可能的. 这限制了它的应用, 特别是控制律在计算机上的实现. 2) 空间测度被破坏: 在一般微分同胚变换下, 空间距离被改变了. 因此, 微分同胚只保留了原状态空间与系统动力学行为的拓扑性质而丧失了度量性质. 这样, 与距离有关的问题, 如最优控制等, 在几何框架下讨论起来就不方便. 3) 无层次性: 在一般非线性变换下, 线性结构被破坏, 每次每换, 都是对系统的一种重新塑造. 因此, 缺乏线性与非线性之间的相容性. 4) 准线性控制: 目前最常用的控制律是将非线性项消去后用线性控制律来控制非线性系统. 这种方法对系统要求太高. 例如, 要求零动力系统具有“最小相位”等. 实际上, 这种假定将系统的非线性特性忽略了.

为了克服这些几何方法的缺陷,靠微分几何(包括微分代数)自身似难完成.因此,需要引入一些新的、更深刻的数学工具.依赖这些新工具去开拓一个新方向,才有可能突破以上提到的一些旧框架的瓶颈.

另一方面,计算机的飞速发展使我们进入了计算机时代.控制理论作为实用背景很强的学科应该向与高技术结合的方向发展.因此,新的方向应具有便于计算机实现与工程应用的特性.这就是我们设想的,用尽可能少的有穷参数描述非线性模型.

## 2 新模型与新工具

根据我们在研究工作中遇到的一些问题,以及国内外一些探索性的研究,包括笔者们的一些已有的工作,我们提出关于新框架的如下设想:赋予控制系统层次性的模型描述.最简单的是线性系统,最复杂的是一般非线性大系统.这里,层次有两个方向的意义:一是“纵深层次”,二是“横向层次”.第一个层次指的是深度,不同层次说明对系统模型精确度的不同要求.第二个层次指的是广度,不同层次指在这个层次上子系统之间相关性的强弱.在每个深度与广度层次上,模型都只用有穷多个实参数来描述.因此,层次化也可以称之为有穷参数化.即,每一个层次上模型集合都只用尽可能少的有限个基底来描述.这样,线性系统,非线性系统,单一系统,复杂大系统,都可以被纳入一个统一的模型框架.

由于系统在每一个层次上都是实数域上的有穷维模型,它的结构分析与控制器设计都可以在计算机上通过固定的程序将其实现.这就是我们所谓的“控制系统的机械化”.

需要特别指出的是:我们所谓深度方向的层次化与简单的“台劳展开”不同,以及我们所谓的广度方向的层次化与现有的大系统理论也不同.它们确实有形式上的雷同和联系,但却有本质的不同,我们所谓的层次化有更深刻的内涵.我们从已有的工作与目前的考虑说明它们的本质区别.

先看深度层次化与台劳展开.我们略举两点本质差异:1)台劳展开不管取多少项都不能保证近似系统的稳定控制也使原系统稳定.而我们目前在层次化方法方面的工作,已经得到了这种稳定控制的设计方法.2)台劳展开维数过高,即使用计算机实现也有困难,而我们的层次正则型则能大大降低其维数,使计算复杂性从阶乘量级降至低次多项式量级.

再看广度层次化与大系统理论.大系统理论目前实际上是对一个个具体系统寻找有统一效果的分散控制.而我们设想的广度层次化则要将关联层次化,用不同层次的控制律处理不同层次关联的大系统.这里,子系统的维数与组合都随着层次而变化.要实现上述层次化模型的综合和控制,需要解决许多深刻的理论问题与复杂的算法问题.从目前的工作及遇到的困难看,微分几何确已不足以应付这些新的挑战.只有启用更深刻的数学工具才有打破坚冰的可能.目前看来比较实用的三个新工具为:1.微分动力学;2.微分拓扑与代数拓扑;3.代数几何.下面分别说明如何使用这些工具去突破现有理论的局限性,以发展与完善层次化模型的新构想.

在详细讨论新工具的作用前我们希望强调一点:也许有人会担心:用更深刻的工具是否会使理论研究越来越玄乎,离实际应用越来越远?我们的设想正好相反.当年,从初等数学到微积分,许多计算是大大简化了,而不是更复杂了,更深刻的理论工具应该提供更简便更实用的设计与计算方法.这才是我们对新方向的期望.

## 3 微分动力学——联接有穷与无穷的桥梁

微分动力学中的一些结果,如 Morse-Smale 场,结构稳定性,中心流形理论等,已经开始陆续地被用到系统控制中.有关工具可参考文献<sup>[7~10]</sup>.

我们的目的是:系统地使用微分动力学的方法,研究原系统及其有穷参数表现的近似系统的动力学行为之间的关系。一般地说,一个非线性系统必须用无穷参数来准确描述。因此,我们要保证对有穷参数近似系统设计出的控制器有鲁棒性,即对原系统或容许扰动照样运用。目前,我们在这一方面已经得到了一系列令人鼓舞的初步成果,包括证明了推广的中心流形等价定理,提出导数齐次 Lyapunov 函数概念与构造方法,证明了它的一系列性质,系统地使用它来设计非最小相位中心流形的控制。这些工作,突破了现有的“准线性控制”的设计模式,系统地使用真正的非线性控制,保证了有穷参数的近似模型与原系统在这种控制下有拓扑等价的动力学行为。

我们的下一步目标是:用结构稳定性发展能控性理论。或许,需要研究出一套高次结构稳定性理论;如“弱 Morse-Smale 场”等,以确保有穷参数表示的近似系统与原系统或容许扰动系统之间的动力学行为在一定精度的拓扑意义下等价。

总之,微分动力学方法将在无穷参数描述的非线性系统与其有穷参数的逼近之间搭起一个桥梁,使我们的有穷参数层次化模型不仅是一个数学上的简单近似,而且,是一种保证其动力学本性不变的一种“精练”。

#### 4 微分拓扑与代数拓扑——层次化的工具

我们将微分拓扑与代数拓扑放在一起,不仅因为这两学科的内在联系,更重要的是,我们要使用它们做同一件事情:控制系统的层次化。主要用到的工具可参见<sup>[11~13]</sup>。

用微分拓扑及代数拓扑进行控制系统的结构分析已有散见,其中也包括了我們的一些工作和一些探索性的研究。如,用纤维丛考虑非线性系统的对称性<sup>[14]</sup>,用提升(Lifting)考虑一般非线性系统的能控不变性<sup>[15]</sup>,用 Whitney 拓扑考虑控制系统的拓扑结构<sup>[16]</sup>,用代数拓扑考虑反馈集合的代数不变量<sup>[17]</sup>,用横截条件(transversality)证明非线性系统的全局 Heymann 引理<sup>[18]</sup>等等。

我们的主要设想是:用 Jet-bundle 及粗化了的 Whitney 拓扑作为控制系统集合的几何框架。系统的不同层次表现对应于 Whitney 拓扑结构的不同等级的粗化。在每个等级的粗化拓扑意义下作线性化,解耦,反馈控制设计,关联系统关联程度分析,子系统分割与分散控制设计等。

我们希望再次强调:每个层次模型都是实域上的有穷维模型。因此,一切设计都可以转化为数值计算问题,不必借助于符号运算。这使得控制设计及实现由计算机完成变成顺理成章的必然结果。这就是我们所谓的“机械化”。另一方面,由于维数高,计算量大等特点,依赖于计算机的研究与设计也成了新框架不可或缺的手段。

目前,我们面临着许多困难的理论问题需要探讨和解决。例如,在层次化过程中,我们遇到这样一个问题:中心流形是否还有更高层次的不变子流形,使中心流形上的动力学行为由次数更高,维数更低的不变子流形上的动力学行为来决定?简言之,中心是否还有中心?我们试图用纤维丛及提升理论来证明他的存在,但到目前尚是一种假设。

#### 5 代数几何——有穷模型机械化的基础

代数几何<sup>[19~21]</sup>是较前沿的数学工具,吴文俊先生的数学机械化方法证明了代数几何方法在理论及计算机实现方面的巨大威力。最近,其在费尔玛大定理研究上的应用是又一个成功范例。[22]等是代数几何在线性系统控制理论中的应用的一些早期的尝试。我们的一个成功尝试是用代数几何方法提供随机逼近收敛性的一个充分条件。此外,在研究工作中,我们确实一再遇到与代数几何有关的问题。下面提到的,是一些设想与探讨。

首先,我们相信,代数几何是有穷参数模型计算机机械化实现的一个重要理论工具.其理由是基于这样的考虑:有穷参数模型的表现形式是多元多项式系统,而多元多项式正是代数几何的研究对象.这种共性决定了代数几何将在有穷参数模型的研究及其实现中所要扮演的重要角色.

其次,我们想列举一些控制理中的一些问题,我们感到,它们可归结为代数几何方面的问题.例如,

在讨论导数齐次李亚普诺夫函数的负定性时,我们遇到代数簇(Algebraic Variety)的素分解问题.它关系到李亚普诺夫函数的构造性条件.

在讨论到优化与收敛性条件时,我们遇到射影代数超曲面的连通性问题.

在讨论正则反馈控制时,群轨道是对反馈等价数很好的描述.但在考虑奇异反馈问题时,例如著名的Morgan问题,虽然微分代数等方法提供了如无穷结构,本性阶等许多代数不变量,但仍然进展甚微.看来,代数结构(指抽象代数范畴)难以完全解决这个问题.我们正试图用格(Lattice)、同调群等代数几何中的工具来刻画它,或许会有益于问题的解决.

## 6 展 望

从目前的工作与我们的设想出发,我们展望新的模型框架有如下特点:

- 1) 将线性系统与非线性系统融于一体,形成一种统一的标准形,它可同时使用线性系统与非线性系统控制理论的已有结果.根据需要,为工程或各种实际模型提供不同层次的描述.
- 2) 每个层次均为实数域上的有穷维模型,或者说,均为有限参数系统.从而,对非线性系统几何理论中各种符号运算,如李括号、微分同胚等,均退化为数值运算.从而,大大降低系统的复杂性,使对系统的分析与控制设计可完全由计算机实现.最后,将设计成果程序化,或曰计算机化,为控制理论与工程实际应用的结合提供一条切实可行的路径.
- 3) 依层次,保持状态空间的距离到一定精度,使系统的拓扑性质与测度性质同时得到保存,以利于研究与测度有关的问题.如最优控制, $H_\infty$ 方法等.
- 4) 真正使用非线性控制,以突破原来准线性控制的模式.这样,使系统的非线性性真正得到体现和应用.

新方向在研究手段上有以下几个特点:

- 1° 用更新的理论工具去探讨和发掘控制系统更深刻的内在属性,以冀解决一些线性及非线性系统理论中较艰深的问题与新出现的问题.
- 2° 开展依赖于计算机的理论研究.在这计算机日趋普及的时代,用工程技术的进步促进理论研究的开展.使理论研究更具有时代气息.

这一点似乎比较抽象,有使人感到是刻意做文章之嫌,我们举一个最近在研究工作中遇到的实例加以说明:为研究谐振型中心的稳定性,我们需要知道正则投影的余维数<sup>[10]</sup>.这是一个简单的线性影射与李导数运算问题,但因维数以阶乘量级增加,即使系统维数很小(例如3),向量场阶次也不高(例如3)或4).用手算已几乎不可能.而计算机则轻而易举地帮我们算出余维数,找出规律.

3° 理论成果的算法体现.与上述2°密切相关的是:因为研究依赖于计算机,成果也就会有一部分自然地以计算机算法或软件形式体现出来.这种计算机化的成果,将更可能为工程应用提供便捷的工具.

应该指出的是:我们提出新工具与新方法,它们不是用以代替几何理论与几何方法,而是希望为它输入新血液,使它再现青春活力.

总之,我们不自量力地在这篇文章中提出一些不成熟的大胆设想,希望能起到抛砖引玉的作用,以期在非线性控制理论的发展中为新工具的使用呐喊,为新体系的形成催生,为新方向的开拓破土。

### 参 考 文 献

- 1 Isidori, A. . Nonlinear Control Systems. 2nd Ed. , Berlin; Springer-Verlag, 1989
- 2 Nijmeijer, H. A. J. van der Schaft. Nonlinear Dynamical Control Systems. New York; Springer-Verlag, 1990
- 3 Fliess, M. . A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems. Sys. Contr. Lett. , 1986, 7:419—412
- 4 Husemoller, D. . Fibre Bundles. 2nd Ed. , New York; Springer-Verlag, 1975
- 5 Kokotovic, P. V. . The joy of feedback; nonlinear and adaptive. IEEE Control Systems, June, 1992, 7—17
- 6 Isidori, A. and Astolfi, A. . Disturbance attenuation and  $H_{\infty}$  control via measurement feedback in nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1992, 37(9):1283—1293
- 7 Palis, J. and Melo W. de. . Geometric Theory of Dynamic Systems, An Introduction. New York; Springer-Verlag, 1982
- 8 Abraham, R. and Marsden, J. E. . Foundation of Mechanics. 2nd ed. Benjamin Cummings Pub. Comp. , 1980
- 9 Carr. J. . Applications of Centre Manifold Theory. New York; Springer-Verlag, 1981
- 10 Guckenheimer J. and Holmes, P. . Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York; Springer-Verlag, 1983
- 11 Hirsch, M. W. . Differential Topology. New York; Springer-Verlag, 1976
- 12 Golubitsky, M. and Guillemin, V. . Stable Mappings and Their Singularities. New York, Berlin; Springer-Verlag, 1973
- 13 Husemoller, D. . Fibre Bundles. 2nd Ed. , New York; Springer-Verlag, 1975
- 14 Grizzle, J. W. and Marcus, S. I. . The structure of nonlinear control systems possessing symmetries. IEEE Trans. Automat Contr. , 1985, 30(3):248—258
- 15 Nijmeijer, H. , Schuft, A. van der. . Controlled invariance for nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Cont, 1982, AC-27(4):904—910
- 16 程代展,秦化淑,李树荣. 非线性控制系统的拓扑结构. 自动化学报, 1991, 17(2):129—135
- 17 程代展,秦化淑,洪奕光. 稳定反馈空间的拓扑结构. 自动化学报, 1995, 21(3):266—273
- 18 Cheng, D. , Dayawansa, W. and Martin, C. . Global controllability of reduced input nonlinear systems. Problems of Control and Information Theory, 1990, 19(4):289—311
- 19 Kendig, K. . Elementary Algebraic Geometry. New York; Springer-Verlag, 1997
- 20 Hartshorne, R. . Algebraic Geometry. New York; Springer Verlag, 1997
- 21 Shafarevich, I. R. . Basic Algebraic Geometry. 2nd Ed. Vol. 1, 2, New York; Springer-Verlag, 1974
- 22 Byrnes, C. I. . On the control of certain deterministic infinite-dimensional systems by algebro-geometric techniques. American J. Math. , 1978, 100(6):1333—1383

## Hierarchy Structure and Mechanization of Nonlinear Control Systems

—An exploration on new developing direction

CHENG Daizhan, HONG Yiguang, CHEN Hanfu and QIN Huashu

(Institute of Systems Science, Chinese Academy of Sciences • Beijing, 100080, PRC)

**Abstract:** First of all, this paper gives a review for the geometric theory of nonlinear control systems,

shows its advance and points out the bottle-neck for further development. Then an ambitious proposal is presented. Turn over a new leaf for geometric theory of nonlinear control systems via hierarchy-structure decomposition and mechanized computer realization. That consists of finite-parameter-modelling of nonlinear control systems and providing a frame, which is convenient for computer realization of the control design and engineering applications. To realize such a break-through, three new tools are suggested: differential dynamics, differential topology and algebraic topology, and algebraic geometry. In the following the rules played by different tools for solving different problems are sketched. Current advance and further expectation are described in detail.

**Key words:** Whitney topology; normal form; centre manifold; algebraic variety; fibber bundle

### 本文作者简介

**程代展** 1946年生. 1970年毕业于清华大学. 1985年毕业于 Washington University, 获博士学位. 1990年~1993年为国际杂志 J. Math. Systems, Estimation, and Control 副主编, 现为中科院系统所研究员, 博士生导师. 主要研究兴趣: 非线性控制与数值方法.

**洪奕光** 见本刊 1997 年第 2 期第 237 页.

**陈翰馥** 1937年生. 1961年毕业于 Leningrad University. 中国科学院院士, 中国科学院系统科学所所长, 国际 IFAC 技术局成员, 中国自动化学会理事长. 主要研究兴趣: 随机系统, 自适应控制等.

**秦化淑** 见本刊 1997 年第 2 期第 237 页.