第 14 卷第 5 期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 5
1997 年 10 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Oct., 1997

一类非线性奇异摄动控制系统的镇定性*

陈贤峰
(上海交通大学应用数学系·上海,200030)
张伟江
(上海市教育委员会·上海,200041)

摘要:本文讨论了一类非线性奇异摄动控制系统.文中我们运用动态分析的办法,结合处理非线性的技巧.着重研究了该系统的局部光滑反馈镇定性.

关键词:非线性奇异摄动控制系统;镇定;中心流形;范式

1 引 言

在对奇异摄动控制系统的镇定性研究中,人们通常先从其退化系统入手(令 $\varepsilon = 0$),应用边界层校正的技巧进行讨论[1~3].本文考虑如下形式的一类非线性奇异摄动控制系统的反馈镇定性:

$$u' = v, \quad \varepsilon v' = \varepsilon G(u)v^2 + F(u)v + U. \tag{1}$$

它源于运动神经系统的研究,且不满足以前对非线性系统讨论时所作的假设.本文作者采用动态分析的方法,结合处理非线性问题的技巧,如中心流形理论、范式理论、焦点判别法等等,对此类生物系统作了详细的研究,得到了三个定理,为我们构造反馈控制律提供了依据.

2 系统的推导

本节给出系统(1)的推导过程.

我们考虑由 $N+1$ 个相互弱交联的振荡器所构成的链,并假设它们一致相近,仅与最近相交联,且存在自反馈,那么,它们满足以下方程:

$$X_k' = F_k(X_k) + \lambda[G_k^+(X_{k+1}, X_k) + G_k^-(X_{k-1}, X_k)] + \lambda H_k(X_k)/N. \tag{2}$$

其中,$F_k \equiv F + O(\lambda)$. F_k, G_k^+, G_k^-, H_k 皆为光滑函数,$0 < \lambda \ll 1$.

假设

$$X_k' = F_k(X_k) \tag{3}$$

有一个周期为 $2\pi/\omega_k$ 的稳定极限环.

引理 1[7]　设 $X' = F(X), X \in \mathbb{R}^m$,其中 $F \in C^\infty: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,有一个周期为 $2\pi/\omega$ 的稳定的极限环.那末存在光滑坐标 $\theta \in S^1, Y \in \mathbb{R}^{m-1}$ 于此极限环的一个邻域中它可使(3)变为

$$\theta' = \omega, \quad Y' = L(\theta)Y + O(|Y|^2). \tag{4}$$

其中 $O(|Y|^2)$ 可能依赖于 θ.

定理 1　我们在上述极限环中的一个邻域内可选择适当的坐标系 $\theta_k \in S^1, Y_k \in \mathbb{R}^{m-1}$,其中 θ_k 为第 k 个振荡器的相位,在极限环上 $Y_k = 0$.让 $\Phi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$.那么(2)将变成

$$\begin{aligned} &\Phi_k' = \lambda[\Delta_k + H_{k+1}^+(\Phi_{k+1}) - H_k^+(\Phi_k) + H_{k+1}^-(-\Phi_k) - H_k^-(-\Phi_{k-1})] + \lambda\overline{H}_k(\Phi_k)/N, \\ &\theta_1' = O(1). \end{aligned} \tag{5}$$

为研究振荡器链的相锁现象,我们只须考虑平均方程(5)的不动点方程,即:

---

* 国家自然科学基金和国家攀登计划经络研究项目资助课题.
本文于 1995 年 12 月 25 日收到. 1996 年 9 月 3 日收到修改稿.

$$0=\Delta_k+H^{+}_{k+1}(\Phi_{k+1})-H^{+}_{k}(\Phi_k)+H^{-}_{k+1}(-\Phi_k)-H^{-}_{k}(-\Phi_{k-1}+\frac{1}{N}\overline{H}_k(\Phi_k). \tag{6}$$

为叙述方便起见，让 $H^{\pm}_k=H^{\pm}$，$\overline{H}_k=h$，令 $\beta_k/N=\Delta_k$，以及

$$f\equiv(H^{+}_{e}+H^{-}_{e})/2+(H^{+}_{0}-H^{-}_{0})/2,\quad g\equiv(H^{+}_{0}+H^{-}_{0})/2+(H^{+}_{e}-H^{-}_{e})/2. \tag{7}$$

其中，$H^{\pm}(\Phi)=H^{\pm}_{0}(\Phi)+H^{\pm}_{e}(\Phi)$ 为其奇-偶分解(即 $H^{\pm}_{e}(-\Phi)=H^{\pm}_{e}(\Phi)$，$H^{\pm}_{0}(-\Phi)=-H^{\pm}_{0}(\Phi)$).

那么(6)将可改写为

$$0=\frac{1}{N}\left\{\beta_k+\frac{2[f(\Phi_{k+1}-f(\Phi_{k-1})]}{(2/N)}+\frac{1}{N}\frac{[g(\Phi_{k+1})-2g(\Phi_k)+g(\Phi_{k-1})]}{(1/N)^2}+h(\Phi_k)\right\}. \tag{8}$$

设 $\beta(x)$ 光滑，$0\leqslant x\leqslant 1$，且 $\beta_k=\beta(\frac{k}{N+1})$，$\Phi_k\approx\Phi(\frac{k}{N+1})$. (9)

那末，当 N 很大时，$\Phi(x)$ 将近似地满足以下形式的微分方程

$$0=\beta(x)+2f(\Phi)_x+\frac{1}{N}g(\Phi)_{xx}+h(\Phi). \tag{10}$$

若假设 $g'(\Phi)>0$ 及 $N\gg 1$. 我们令：$\frac{1}{N}=\varepsilon$，并且在以下的讨论中我们假设各振荡器间频率相等，即：$\beta(x)=0$. 通过变换，于是(10)变成如下形式

$$\Phi_x=v,\quad \varepsilon v_x=\varepsilon G(\Phi)v^2+F(\Phi)v+H(\Phi). \tag{11}$$

3　主要结果

考虑如下奇异摄动控制系统的局部反馈镇定问题

$$u'=v,\quad \varepsilon v'=\varepsilon G(u)v^2+F(u)v+H(u). \tag{12}$$

其中，F,G,H 是光滑函数，“$'$”表示$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，反馈函数 $H(u)$ 满足 $H(0)=0$，$0<\varepsilon\ll 1$.

作伸展变换：$t=\varepsilon\tau$，(12)将为如下形式：

$$\dot{u}=\varepsilon v,\quad \dot{v}=\varepsilon G(u)v^2+F(u)v+H(u). \tag{13}$$

其中，F,G,H 是光滑函数，“$\cdot$”表示$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}$，$0<\varepsilon\ll 1$.

3.1　$F(0)\neq 0$

根据微分方程线性近似理论、稳定性理论及中心流形定理[4]得如下结论：

定理 2　对反馈系统(12)而言，当 $F(0)<0$ 时，光滑反馈 $U=H(u)$ 若满足下列条件之一，均为局部反馈镇定的：

(H_1)　　$H'(0)<0$，

(H_2)　　$H'(0)=H''(0)=0,\quad H'''(0)<0$.

证明从略.

3.2　$F(0)=0,H'(0)\neq 0$

根据微分方程线性近似理论知，当 $F(0)=0$，$H'(0)<0$ 时，(13) 的线性化系统的原点是中心型，根据后继判别法则[6]，我们得到了下面的定理：

定理 3　对反馈系统(12) 而言，若 $F(0)=0$，且光滑反馈 $U=H(u)$ 满足 $H'(0)<0$ 及 $F''(0)<F'(0)\left[\frac{H''(0)}{H'(0)}-2G(0)\right]$时. (12)为局部反馈镇定的.

证　将系统(13)作如下代换

$$w=\sqrt{-\frac{H'(0)}{\varepsilon}}u. \tag{14}$$

则,系统(13)可变成如下形式

$$\dot{w}=\sqrt{-\varepsilon H'(0)}v,$$

$$\dot{v}=-\sqrt{-\varepsilon H'(0)}w+\varepsilon G\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}w\Big)v^2+F\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}w\Big)v$$

$$+H\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}w\Big)+\sqrt{-\varepsilon H'(0)}w. \tag{15}$$

对(15)再作极坐标变换

$$w=r\cos\theta,\quad v=r\sin\theta. \tag{16}$$

那么,(15)在变换(16)的作用下变为

$$\dot{r}=\varepsilon G\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)r^2\sin^3\theta+F\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)r\sin^2\theta$$

$$+H\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)\sin\theta+\mu\gamma\cos\theta\sin\theta, \tag{17}$$

$$\dot{\theta}=-\mu+\frac{1}{r}\Big[\varepsilon G\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)r^2\sin^2\theta+F\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)r\sin\theta$$

$$+H\Big(\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}r\cos\theta\Big)+\mu\gamma\cos\theta\Big]\cos\theta. \tag{18}$$

其中 $\mu=\sqrt{-\varepsilon H'(0)}$.

取 $r_0>0$ 充分小,使得 $0\leqslant r\leqslant r_0$, $-\infty<\theta<+\infty$ 时(18)右边恒不等于零,由(17)(18)得:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=R_2(\theta)r^2+R_3(\theta)r^3+\cdots. \tag{19}$$

根据后继判别法则[6],我们可以计算出

$$g_2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_2(\theta)\mathrm{d}\theta=0, \tag{20}$$

$$r_2(\theta)=\int_0^{\theta}R_2(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=-\frac{1}{\mu}\Big[\frac{F'(0)}{3}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{H'(0)}}\sin^3\theta+\varepsilon G(0)\Big(\frac{2}{3}-\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big)$$

$$+\frac{\varepsilon H''(0)}{6H'(0)}\cos^3\theta-\frac{\varepsilon H''(0)}{6H'(0)}\Big]. \tag{21}$$

$$g_3=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[R_3(\theta)+2R_2(\theta)r_2(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\varepsilon}{16\mu H'(0)}\Big[F''(0)+2F'(0)G(0)-\frac{F'(0)H''(0)}{H'(0)}\Big]. \tag{22}$$

根据定理假设及 μ,ε 为正数,$H'(0)$ 为负数知

$$g_3>0. \tag{23}$$

又根据后继判别法知(13)的平衡点为稳定的焦点,故是渐近稳定的. 证毕.

3.3　$F(0)=0, H'(0)=0$.

定理 4　当系统(12)满足 $F'(0)=0, F''(0)<0$,光滑反馈 $U=H(u)$ 满足 $H'(0)=H''(0)=0, H'''(0)<0$ 时,系统(12)为局部反馈镇定的.

证　由零解稳定的必要条件,渐近稳定的充分条件及范式定理[5]知,易证该定理成立,从略.

4　结束语

本文采用动态分析的方法,结合处理非线性的技巧,对一类非线性奇异摄动生物控制系统的镇定性作了深入地研究,为我们的控制与应用提供了切实的理论基础.

参　考　文　献

1　Kokotovic, P. V., O'Malley, R. E. and Sannuti, P.. Singular perturbations and order reduction in control theory——an overview. Automatica, 1976, 12(2): 123—132

2　Saksena, V. R., O'Reilly, J. and Kokotovic, P. V.. Singular perturbations and time-scale methods in control theory: Survey 1976—1983. Automatica, 1984, 20(3): 273—293

3　Khalil, H. K.. Feedback control of nonstandard singularly perturbed systems. IEEE Trans. 1989, AC-34(10): 1052—1059

4　Carr, J.. Application of center manifold theory. New York: Springer-Verlag, 1981

5　Guckenheimer, J. and Holems, P.. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983

6　张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题.北京:北京大学出版社,1981,38—46

7　Fenichel, N.. Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows. Indiana Univer. Math. J., 1971, 21(2): 193—226

Stabilization of a Kind of Nonlinear Singularly Perturbed Control Systems

CHEN Xianfeng

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiao Tong University · Shanghai, 200030, PRC)

ZHANG Weijiang

(Shanghai Municipal Education Commission · Shanghai, 200041, PRC)

Abstract: In this paper, a kind of nonlinear singularly perturbed control systems is discussed. We apply dynamical analysis methods combining techniques dealing with the nonlinear problems to stabilization with a smooth feedback control.

Key words: nonlinear singularly perturbed control system; stabilization; centre manifold; normal form

本文作者简介

陈贤峰　1971 年生. 1993 年毕业于安徽师范大学数学系,1996 年获上海交通大学应用数学系理学硕士学位,并留校任教. 主要从事生物和生命科学中非线性动力系统的研究.

张伟江　1946 年生. 1967 年南京大学毕业(本科),1982 年获上海交通大学理学硕士(应用数学),1988 年获美国东北大学博士,现为教授,自动控制专业博士生导师. 主要从事生物和生命科学中非线性动力学中的数学建模,系统分析与控制,复杂计算,仿真与应用.