第 14 卷第 5 期　　控制理论与应用　　Vol. 14, No. 5
1997 年 10 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Oct., 1997

广义离散随机线性系统最优滤波·预报和平滑估计的统一格式

张焕水　　柴天佑
(泰安师范专科学校·泰安, 271000)　(东北大学自动化研究中心·沈阳, 110006)

摘要：本文运用新息理论和射影的方法研究广义离散随机线性系统最优状态估计. 将状态估计转化为输出预报估计和白噪声估计，提出了广义离散随机线性系统最优滤波、预报、平滑估计的统一格式.

关键词：广义离散随机线性系统；最优滤波；预报、平滑估计；统一格式

1 引　言

广义离散随机线性系统的状态估计近年来受到人们的关注[1~4]，现有文献采用最小二乘法和 Kalman 滤波方法研究问题. 文献[5]运用新息理论和射影的方法初步解决了广义系统预报估计，其基本方法是将状态预报估计转化为输出预报和白噪声估计. 本文基于文献[5]的研究方法对问题做进一步讨论，得到了广义离散随机线性系统最优滤波、预报和平滑估计的两种统一方法，去掉了文献[5]要求 Φ 可逆的局限性.

已知广义离散随机线性系统

$$Mx(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma w(k), \tag{1.1}$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k). \tag{1.2}$$

其中 $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $w(k) \in \mathbb{R}^r$, $y(k) \in \mathbb{R}^m$, $v(k) \in \mathbb{R}^m$ 分别表示系统的状态矢量、模型噪声矢量、观测矢量、观测噪声. M, Φ, Γ, H 分别为相应维数的矩阵.

假设 1　系统满足完全可观测，即任意 z

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} zM-\Phi \\ H \end{pmatrix} = n, \quad z \text{ 有限}, \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} M \\ H \end{pmatrix} = n.$$

假设 2　$\det(zM-\Phi) \neq 0$, z 任意, M 奇异.

假设 3　$w(k), v(k)$ 是零均值不相关白噪声序列. $Ew(k)=0, Ev(k)=0, E\{w(k)w^{\mathrm T}(i)\} = Q_w\delta_{ki}$, $E\{v(k)v^{\mathrm T}(i)\} = Q_v\delta_{ki}$, $E\{w(k)v^{\mathrm T}(i)\} = 0$.

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k=i, \\ 0, & k\neq i. \end{cases}$$

最优状态估计问题：基于观测 $y(k), y(k-1), \cdots, y(0)$ 求状态 $x(j)$ 的线性最小方差估值 $\hat{x}(j|k)$. $j=k$ 时为最优滤波，$j>k$ 时为最优预报，$j<k$ 时为最优平滑.

2 ARMA 新息模型

由(1.1)和(1.2)得

$$y(k) = H(M-\Phi q^{-1})^{-1}\Gamma w(k-1) + v(k), \tag{2.1}$$

由假设 2，即系统正则，则存在满秩矩阵 Q 及 P 使得[6]

$$P^{-1}(M-\Phi q^{-1})^{-1}Q^{-1} = \begin{bmatrix} (I_{\bar n_2} - A_1 q^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & (N_1 - I_{\bar n_1} q^{-1})^{-1} \end{bmatrix}$$

本文于 1995 年 5 月 31 日收到. 1996 年 7 月 11 日收到修改稿

$$= \frac{1}{\det(I_{\bar{n}_2} - A_1 q^{-1})}\begin{bmatrix} \mathrm{adj}(I_{\bar{n}_2} - A_1 q^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ q^{r_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I_{\bar{n}_1}q^{-r_0+1} - N_1 q^{-r_0+2} - \cdots - N_1^{r_0-1} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

其中 $A_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}_2\times\bar{n}_2}$ ，$N_1 \in \mathbb{R}^{\bar{n}_1\times\bar{n}_1}$ ，$n = \bar{n}_1 + \bar{n}_2$. N_1 是幂零矩阵，幂零指数为 r_0，即 $N_1^{r_0-1} \neq 0$，$N_1^{r_0} = 0$. 系统含有脉冲模时 $r_0 > 0$，无脉冲模时 $r_0 = 0$. 根据 (2.2) 式，$(M - \Phi q^{-1})^{-1}$ 很容易写成如下形式：

$$(M - \Phi q^{-1})^{-1} = \frac{(\bar{F}_0 + \bar{F}_1 q^{-1} + \cdots + \bar{F}_{n_1-1}q^{-(n_1-1)})q^{r_0}}{1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_2}q^{-n_2}}. \tag{2.3}$$

其中(2.3)式中 $1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{n_2}q^{-n_2}$ 是矩阵 A_1 的最小多项式. $A_1 = 0$ 时，显然 $1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{n_2}q^{-n_2} = 1$. 将(2.3)式代入(2.1)式得

$$A(q^{-1})y(k) = C(q^{-1})w(k + n_0 - 1) + A(q^{-1})v(k). \tag{2.4}$$

其中 $A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_{n_2}q^{-n_2}$，　$C(q^{-1}) = C_0 + C_1q^{-1} + \cdots + C_{n_1-r_1-1}q^{-(n_1-r_1-1)}$，$n_0 = r_0 - r_1, r_1 \geqslant 0, C_0 \neq 0$. (2.4)式右边的两个 MA 滑动平均过程可以用唯一稳定的 MA 过程表示

$$D(q^{-1})\varepsilon(k) = C(q^{-1})w(k + n_0 - 1) + A(q^{-1})v(k). \tag{2.5}$$

其中 $D(q^{-1}) = I_m + D_1q^{-1} + \cdots + D_{n_d}q^{-n_d}, n_d = \max(n_1 - r_1 - 1, n_2)$，$D(q^{-1})$ 稳定. $\varepsilon(k)$ 是零均值的白噪声序列，方差阵为 Q_ε，$\varepsilon(k)$ 是观测 $y(k)$ 的新息，即一步预报误差. 由(2.4)，(2.5)得 ARMA 新息模型

$$A(q^{-1})y(k) = D(q^{-1})\varepsilon(k). \tag{2.6}$$

新息计算如下

$$\varepsilon(k) = A(q^{-1})y(k) - D_1\varepsilon(k-1) - \cdots - D_{n_d}\varepsilon(k - n_d), \tag{2.7}$$

初始值为 $\varepsilon(0), \cdots, \varepsilon(n_d - 1)$.

由文献[7]知，若 $\begin{pmatrix} M \\ H \end{pmatrix}$ 列满秩，则存在一矩阵 K_0 使得 $M + K_0H$ 满秩，记 $\bar{\Phi} = (M + K_0H)^{-1}\Phi$.

引理　在假设 1 下，以下两个矩阵列满秩

$$\Omega_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} M & -\Phi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & -\Phi & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\Phi \\ H & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & H \end{bmatrix}}_{\alpha个}, \quad \Omega_1 = (H^{\mathrm{T}}, \bar{\Phi}^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}}, \cdots (\bar{\Phi}^{\mathrm{T}})^{\alpha-1}H^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}.$$

其中 α 是可观测指数.

3　白噪声最优估计及输出最优估计

3.1　白噪声最优估计

根据文献[5]，白噪声 $w(k+i), v(k+i)$ 基于观测 $\{y(k), y(k-1), \cdots, y(0)\}$ 的最优估计

$\hat{w}(k+i|k),\hat{v}(k+i|k)$ 计算如下

$$i > n_0 - 1 \text{时}, \quad \hat{w}(k+i|k) = 0,$$

$$i \leqslant n_0 - 1 \text{时}, \quad \hat{w}(k+i|k) = \sum_{s=0}^{n_0-i-1} Q_w G_s^{\mathrm{T}} Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(k+s+i-n_0+1). \tag{3.1}$$

$$i > 0 \text{时}, \quad \hat{v}(k+i|k) = 0,$$

$$i \leqslant 0 \text{时}, \quad \hat{v}(k+i|k) = \sum_{s=0}^{-i} Q_v \Pi_s Q_\varepsilon^{-1} \varepsilon(k+s+i). \tag{3.2}$$

其中 G_s 和 Π_s 由以下两式计算

$$G_s = -\sum_{i=1}^{\min(n_d,s)} D_i G_{s-i} + C_s, \quad G_0 = C_0, \tag{3.3}$$

$$\Pi_s = -\sum_{i=1}^{\min(n_d,s)} D_i \Pi_{s-i} + a_s I_m, \quad \Pi_0 = I_m. \tag{3.4}$$

$s > n_1 - r - 1$ 时 $C_s = 0$，$s > n_2$ 时 $a_s = 0$.

3.2 最优输出估计

由 ARMA 新息模型(2.6)得输出 $y(k)$ 的多步递推预报器

$$A(\tilde{q}^{-1})\hat{y}(k+i|k) = D_i(q^{-1})\varepsilon(k+i), \tag{3.5}$$

其中 $\tilde{q}^{-1}$ 是只对 $\hat{y}(k+i|k)$ 的第一个时标运算，即 $\tilde{q}^{-1}\hat{y}(k+i|k) = \hat{y}(k+i-1|k)$，$D_i(q^{-1}) = D_i q^{-i} + \cdots + D_{n_d} q^{-n_d}$；$i > n_d$ 时，$D_i(q^{-1}) = 0$，且有 $i - s \leqslant 0$ 时，$\hat{y}(k+i-s|k) = y(k+i-s)$.

4 最优状态滤波、预报、平滑估计的统一格式

(1.1)，(1.2)式可以等价地写成如下系统

$$x(k+1) = \bar{\Phi}x(k) + Ky(k+1) + \eta(k), \tag{4.1}$$

$$y(k) = Hx(k) + v(k). \tag{4.2}$$

其中 $\bar{\Phi} = S\Phi$，$K = SK_0$，$\eta(k) = S\Gamma w(k) - Kv(k+1)$，$S = (M + K_0 H)^{-1}$. 由(4.1)(4.2)式容易写出如下等式

$$\Omega_1 x(j) = \begin{bmatrix} y(j) - v(j) \\ y(j+1) - HKy(j+1) - H\eta(j) - v(j+1) \\ \vdots \\ y(j+\alpha-1) - \sum_{i=0}^{\alpha-2} H\bar{\Phi}^{\alpha-i-2}Ky(j+i+1) - \sum_{i=0}^{\alpha-2} H\bar{\Phi}^{\alpha-i-2}\eta(j+i) - v(j+\alpha-1) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

定理 1 广义离散随机系统(1.1)，(1.2)最优滤波、预报和平滑估计可写成如下统一格式

$$x(j|k) = \Omega_1^{\#} \begin{bmatrix} \hat{y}(j|k) - v(j|k) \\ \hat{y}(j+1|k) - HK\hat{y}(j+1|k) - H\hat{\eta}(j|k) - \hat{v}(j+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(j+\alpha-1|k) - \sum_{i=0}^{\alpha-2} H\bar{\Phi}^{\alpha-i-2}K\hat{y}(j+i+1|k) \\ - \sum_{i=0}^{\alpha-2} H\bar{\Phi}^{\alpha-i-2}\eta(j+i|k) - v(j+\alpha-1|k) \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

其中　$\Omega_1^{\#}=(\Omega_1^{\mathrm{T}}\Omega_1)^{-1}\Omega_1^{\mathrm{T}}$，$\eta(i+j|k)=S\Gamma\hat{w}(i+j|k)-K\hat{v}(i+j+1|k)$，$i=0,1,\cdots,\alpha-2$，$\hat{w}(k+i|k)$，$\hat{v}(k+i|k)$ 由(3.1)，(3.2)式计算，$\hat{y}(i+j|k)$ 由式(3.5)递推计算，$i=0,1,\cdots,\alpha-1$.

证　(4.3)式是由(4.1)和(4.2)变形得到的，由于系统满足可观测，即 Ω_1 列满秩，将(4.3)式两边同时左乘 Ω_1^{T}，然后再左乘 $(\Omega_1^{\mathrm{T}}\Omega_1)^{-1}$ 知状态 $x(j)$ 有如下表达式

$$x(j)=\Omega_1^{\#}\begin{bmatrix} y(j)-v(j) \\ y(j+1)-HKy(j+1)-H\eta(j)-v(j+1) \\ \vdots \\ y(j+\alpha-1)-\sum_{i=0}^{\alpha-2}H\overline{\Phi}^{\alpha-i-2}(Ky(j+i+1)+\eta(j+i))-v(j+\alpha-1) \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

根据射影理论知 $\hat{x}(j|k)$ 是 $x(j)$ 由新息 $\varepsilon(k)$，$\varepsilon(k-1)$，$\cdots$，$\varepsilon(0)$ 所生成的线性流形上的射影，取(4.5)式两边各项在以上流形上的射影运算得(4.4)式.　　证毕.

类似地，由(1.1)，(1.2)易得如下关系

$$\Omega_2\begin{bmatrix} x(j) \\ x(j-1) \\ \vdots \\ x(j-\alpha+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Gamma w(j-1) \\ \vdots \\ \Gamma w(j-\alpha+1) \\ y(j)-v(j) \\ \vdots \\ y(j-\alpha+1)-v(j-\alpha+1) \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

定理 2　广义离散随机线性系统(1.1)，(1.2)最优滤波、预报和平滑估计可以写成如下形式

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(j|k) \\ \hat{x}(j-1|k) \\ \vdots \\ \hat{x}(j-\alpha+1|k) \end{bmatrix}=\Omega_2^{\#}\begin{bmatrix} \Gamma\hat{w}(j-1|k) \\ \vdots \\ \Gamma\hat{w}(j-\alpha+1|k) \\ \hat{y}(j|k)-v(j|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(j-\alpha+1|k)-\hat{v}(j-\alpha+1|k) \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

其中 $\Omega_2^{\#}=(\Omega_2^{\mathrm{T}}\Omega_2)^{-1}\Omega_2^{\mathrm{T}}$.

说明　容易证明定理1和定理2给出的最优滤波、预报和平滑估计算法对于初始值 $\varepsilon(0)$，$\varepsilon(1)$，$\cdots$，$\varepsilon(n_d-1)$ 的选取全局渐近稳定.

5　结束语

本文的主要工作：

1）基于新息理论和射影方法，讨论了广义离散随机线性系统最优状态估计问题.同现有文献[1]～[4]的结果相比较，解决了系统的最优预报问题，平滑估计问题.去掉了文献[5]要求 Φ 可逆的局限性.

2）在提出系统最优状态估计的同时，给出了白噪声的最优估计.

参考文献

1 王恩平,王朝珠.广义离散随机线性系统的最优递推滤波方法(1).自动化学报,1988,14(6):409-415

2 Dai, L.. Filtering and LQG problem for discrete-time stochastic singular systems. IEEE. Trans Automat. Contr., AC-34:1105-1108

3 秦超英,戴冠中.采用奇异值分解设计广义系统的最优滤波器.控制理论与应用,1994,11(2):177-181

4 Darouach, M., Zasadzinski, M. and Mehdi, D.. State estimation of stochastic singular linear systems. I. J. Systems Sci., 1993,24:345-354

5 张焕水,邓自立.广义离散随机线性系统自校正最优预报器.自动化学报,1996,22(1):49-57

6 Cobb, J. D.. Controllability, observability and duality in singular systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984,29:1076-1082

7 王跃云,金钟骥,张钟俊.广义系统的反馈控制与极点配置方法.自动化学报,1988,14(4):284-288

The Unified Form to the Optimal Filtering · Prediction and Smoothing for Singular Discrete Stochastic Linear System

ZHANG Huanshui

(Taian Teacher's College · Taian, 271000,PRC)

CHAI Tianyou

(Research Center of Automation, Northeasterm University · Shengyang, 110006,PRC)

Abstract: Using the innovation theory and projection method, this paper deals with the optimal state estimation for the singular discrete stochastic linear system. Converting the state estimation into the output estimation and noises estimation, the paper presents the unified form to the optimal filtering, prediction and smoothing for the singular discrete stochastic linear system.

Key words: singular discrete stochastic linear system; optimal filtering; prediction and smoothing estimation; the unified form

本文作者简介

张焕水 1963年生.1984年毕业于泰安师专数学系,1991年于黑龙江应用数学研究所获硕士学位.现为东北大学自动化研究中心博士生.研究方向为自适应Kalman滤波理论,反卷积,广义系统滤波估计.

柴天佑 1947年生.1985年毕业于东北工学院获博士学位.现为东北大学教授,博士生导师.长期从事工业自动化,自适应控制理论及应用的研究.主要研究兴趣有自适应控制,智能控制,工业过程综合自动化及复杂系统辨识和控制.曾获多项国家科研成果与奖励.