第 14 卷第 5 期
1997 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 5
Oct., 1997

一类不确定奇异摄动系统的鲁棒控制

岳 东
(中国矿业大学信息与电气工程学院・徐州,221008)

高存臣 刘永清
(华南理工大学自动控制工程系・广州,510641)

摘要: 本文研究了一类不确定奇异摄动系统,给出了新的鲁棒控制器的设计方法. 仿真结果表明,对这里研究的系统类型,本文所给控制具有更好的抗干扰能力.

关键词: 奇异摄动系统; 鲁棒控制; 李亚普诺夫函数; 最终有界

1 引 言

用奇异摄动理论来研究控制系统中各类问题的工作日益发展,这一内容如今已成为现代控制理论中的一个分支.

对奇异摄动系统,为克服系统的建模误差与外干扰对系统性能分析的影响,近年来人们提出了奇异摄动系统鲁棒性的概念. 并利用奇异摄动理论给出了若干鲁棒控制的设计方法[1~3]. 在[1,2]中,Garofalo 等人在仅出现慢变非线性项时设计了复合型鲁棒控制器. 随后,[3]中提出一种较简单的保证系统闭环最终有界的非线性控制器. 然而,[3]中并未具体研究此界有多大. 实际上,由[3]中证明可见,此界往往与控制器的系数 γ 有关. 因此当 γ 较大时此界也较大. 另外[3]中要求快子系统中出现的扰动项是连续可微的.

本文研究一类不确定奇异摄动系统的鲁棒控制设计问题,这里考虑的不确定项类型与[1,3]中的不同,无需要求如[3]中的连续可微条件. 对此类系统,我们提出一鲁棒控制,该控制可保证系统解最终有界,且此界可充分小. 仿真结果表明,本文所给控制具有较强的抗干扰能力. 另外,通过仿真比较看,以往文献的结果用于本文研究的系统效果不佳.

2 准备工作

本文考虑如下系统

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u + f_1(t,x,z), \tag{1a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u + f_2(t,x,z). \tag{1b}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n, z(t) \in \mathbb{R}^m$ 表示状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ 为控制向量. $f_i(t,x,z)(i = 1,2)$ 表示参数摄动与外扰动. $0 < \varepsilon << 1$ 为奇异摄动参数.

注 1 设 $y \in \mathbb{R}^n$, $\|y\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2}$ 表示 y 的范数.

给出若干假设:

1) A_{22} 是可逆的.

2) $(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)$ 是可控对.

3) (A_{22}, B_2) 是可控对.

4) 存在 $q(t,x,z)$ 使 $f_i(t,x,z)$ 可表示成

$$f_i(t,x,z) = B_iq(t,x,z), \tag{2}$$

本文于 1995 年 3 月 29 日收到. 1996 年 12 月 23 日收到修改稿.

且 $q(t,x,z)$ 满足如下关系

$$\| q(t,x,z) \| \leqslant \rho_1 + \rho_2 \| x \| + \rho_3 \| z \|. \tag{3}$$

注 2 本文对不确定项的限制条件与[1,3]中均不同．这里给出了假设 4)，即满足一匹配条件．

在[1]中要求 $f_2(t,x,z)$ 不出现，在[3]中则要求 $f_2(t,x,z)$ 关于 t 是连续可微的．

3 控制的设计

由假设 2) 知，存在矩阵 K 使

$$(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)K$$

是稳定阵．

取控制律为

$$u = Kx + v. \tag{4}$$

这里 v 是一新的输入量．

将(4)代入(1)得

$$\dot{x} = (A_{11} + B_1K)x + A_{12}z + B_1v + B_1q(t,x,z), \tag{5a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = (A_{21} + B_2K)x + A_{22}z + B_2v + B_2q(t,x,z). \tag{5b}$$

令 $\eta = z + A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2K)x$，则有

$$\dot{x} = A_{11}^0 x + A_{12}\eta + B_1v + B_1q(t,x,z), \tag{6a}$$

$$\varepsilon\dot{z} = A_{22}\eta + B_2v + B_2q(t,x,z) + O(\varepsilon). \tag{6b}$$

这里 $A_{11}^0 = A_{11} + B_1K - A_{12}A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2K) = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)K$，因此由前知它是一个稳定阵．

$$O(\varepsilon) = \varepsilon A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2K)[A_{11}^0 x + A_{12}\eta + B_1v + B_1q(t,x,z)], \tag{7}$$

将 $z = \eta - A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2K)x$ 代入(3)得估计

$$\begin{aligned} \| q(t,x,z) \| &\leqslant \rho_1 + (\rho_2 + \rho_3 \| A_{22}^{-1}(A_{21} + B_2K) \|) \| x \| + \rho_3 \| \eta \| \\ &\triangleq \rho_1 + \rho_0 \| x \| + \rho_3 \| \eta \| \triangleq \rho(t,x,\eta). \end{aligned} \tag{8}$$

以下将利用(6b)的变量 η 对控制 v 进行设计，为此取控制率 v 为

$$v = K_0\eta - \begin{cases} \rho(t,x,\eta)\dfrac{B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta}{\| B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta \|}, & \| B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta \| > \delta, \\ \rho(t,x,\eta)\dfrac{B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta}{\delta}, & \| B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta \| \leqslant \delta. \end{cases} \tag{9}$$

这里选取 K_0 使 $A_{22} + B_2K_0$ 为稳定阵，K_0 的存在性可由假设 1) 决定．$\rho(t,x,\eta)$ 为(8)中所定义．

为研究(9)对系统(6)的镇定作用，首先考虑(9)作用下系统(6)的一致最终有界性．

取系统(6)在 $t = t_0$ 时的初值为 (x_0,η_0)，研究当 ε 充分小时，在怎样的条件下，过 (x_0,η_0) 的解是一致最终有界，且此界与 (x_0,η_0) 的取值无关，与参数 δ,ε 同阶．

构造 Lyapunov 函数为

$$V = x^{\mathrm{T}}P_1x + \varepsilon\eta^{\mathrm{T}}P_2\eta,$$

这里 P_1,P_2 及(9)中的 P_2 中的是下两 Lyapunov 矩阵方程的解

$$A_{11}^{0\mathrm{T}}P_1 + P_1A_{11}^0 = -Q_1, \quad (A_{22} + B_2K_0)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2(A_{22} + B_2K_0) = -Q_2.$$

这里 Q_1,Q_2 是两正定阵.

则 V 沿(6)的解的导数为

$$\dot{V} \leqslant x^{\mathrm{T}}(A_{11}^{0^{\mathrm{T}}}P_1 + P_1A_{11}^0)x + 2x^{\mathrm{T}}P_1A_{12}^0\eta + 4\rho(t,x,\eta)(x^{\mathrm{T}}P_1B_1)$$
$$+ \eta^{\mathrm{T}}(A_{22}^{0^{\mathrm{T}}}P_2 + P_2A_{22}^0)\eta + 2(B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta)^{\mathrm{T}}q + 2\eta^{\mathrm{T}}P_2O(\varepsilon)$$

这里 $A_{12}^0 = A_{12} + B_1K_0, A_{22}^0 = A_{22} + B_2K_0, v_1$ 为(9)的非线性部分.

注意

$$\|O(\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon \|A_{22}^{-1}(A_{12} + B_2K)\| [\|A_{11}^0\| \|x\| + \|A_{12}\| \|\eta\| + \|B_1K_0\| \|\eta\|$$
$$+ 2\|B_1\|\rho_1 + 2\rho_0\|B_1\| \|x\| + 2\rho_3\|B_1\| \|\eta\|]$$
$$\triangleq \varepsilon[\theta_1 + \theta_2\|x\| + \theta_3\|\eta\|],$$

则当 $\|B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta\| > \delta$ 时,

$$\dot{V} \leqslant -\lambda_1\|x\|^2 + 2\|P_1A_{12}^0\| \|x\| \|\eta\| + 4\|P_1B_1\| \|x\|\rho(t,x,\eta)$$
$$-\lambda_2\|\eta\|^2 + 2\varepsilon\|P_2\| \|\eta\|[\theta_1 + \theta_2\|x\| + \theta_3\|\eta\|].$$

这里 $\quad \lambda_1 = \lambda_{\min}(Q_i), \quad (i = 1,2)$

当 $\|B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta\| \leqslant \delta$ 时,

$$\dot{V} \leqslant -\lambda^1\|x\|^2 - \lambda^2\|\eta\|^2 + 4\rho\|P_1B_1\| \|x\| + 2\varepsilon\theta_1\|P_2\| \|\eta\| + \delta.$$

这里 d 是一适当选取的正数,

$$\lambda^1 = \lambda_1 - \|P_1A_{12}^0\|d^{-1} - 2\rho_0\|P_1B_1\| - 2\rho_3\|P_1B_1\|d^{-1} - \varepsilon\theta_2\|P_2\|,$$
$$\lambda^2 = \lambda_2 - \|P_1A_{12}^0\|d - 2\rho_3\|P_1B_1\|d - \varepsilon\theta_2\|P_2\| - 2\varepsilon\theta_3\|P_2\|.$$

定理 1 若假设 1),2),3),4) 成立且 $\lambda_1 - 2\rho_0\|P_1B_1\| > 0$,则存在 ε^*,,当 $\varepsilon \in (0,\varepsilon^*]$ 时,在(9) 作用下系统(6) 的解是一致最终有界的.

证 若 $\lambda_1 - 2\rho_0\|P_1B_1\| > 0$,由于 P_1 已定,因此当 d 充分大时有

$$\lambda_1 - \|P_1A_{12}^0\|d^{-1} - 2\rho_0\|P_1B_1\| - 2\rho_3\|P_1B_1\|d^{-1} > 0, \tag{A1}$$

又因为对 $\forall\, Q_2$

$$(A_{22} + B_2K_0)^{\mathrm{T}}P_2 + P_2(A_{22} + B_2K_0) = -Q_2$$

有解 P_2. 而 P_2, d 当确定时,只要适当选取 Q_2 使 $\lambda_2 = \lambda_{\min}(Q_2)$ 充分大,则有

$$\lambda_2 - \|P_1A_{12}^0\|d - 2\rho_3\|P_1B_1\|d > 0, \tag{A2}$$

此时 d, P_1, P_2 已确定,且有(A1),(A2)式. 进一步,当

$$\varepsilon^* < \max\left\{\frac{\lambda_1 - \|P_1A_{12}^0\|d^{-1} - 2\rho_0\|P_1B_1\| - 2\rho_3\|P_1B_1\|d^{-1}}{\theta_2\|P_2\|}, \frac{\lambda_2 - \|P_1A_{12}^0\|d - 2\rho_3\|P_1B_1\|d}{\theta_2\|P_2\| + 2\theta_3\|P_2\|}\right\}$$

时,则有 $\lambda^1 > 0, \lambda^2 > 0$. 因此类似[4]中方法可知,存在 γ_0,当 $\bar{\gamma} > \gamma_0, \underline{\gamma} \in (0,\infty)$ 时,存在 $T(\bar{r}, \underline{r})$,使由 $\|x_0\| + \|\eta_0\| \leqslant \underline{r}$ 可推得 $\|x\| + \|\eta\| \leqslant \bar{r}, t > t_0 + T(\underline{r})$. 证毕.

由定理 1 证明可知,对不同初值出发的解最终有 $\|x\| + \|\eta\| \leqslant \bar{r}$,只是所经历的时间 $T(\bar{r}, \underline{r})$ 有可能不同. 而对前面选定的初值(x_0, η_0),设 $\|x_0\| + \|\eta_0\| \leqslant \underline{r}$,因此有 $\|x\| + \|\eta\| \leqslant \bar{r}, t > t_0 + T(\bar{r}, \underline{r})$.

取 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \varepsilon\eta^{\mathrm{T}}P_2\eta,$$

则当 $\|B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta\| > \delta$ 时,

$$\dot{V}_1 \leqslant -(\lambda_2 - \varepsilon\theta_2\|P_2\| - 2\varepsilon\theta_3\|P_2\|)\|\eta\|^2 + 2\varepsilon\theta_1\|P_2\| \|\eta\| + \varepsilon\theta_2\|P_2\| \|x\|^2;$$

当 $\|B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta\| \leqslant \delta$ 时,

$$\dot{V}_1 \leqslant -(\lambda_2 - \varepsilon\theta_2\|P_2\| - 2\varepsilon\theta_3\|P_2\|)\|\eta\|^2$$
$$+ 2\varepsilon\theta_1\|P_2\| \|\eta\| + \varepsilon\theta_2\|P_2\| \|x\|^2 + \delta.$$

由前知，由(x_0,η_0)出发的解$(x(t),\eta(t))$，当$t>t_0+T(\bar{r},\underline{r})$时有$\|x\|\leqslant\bar{r}$，$\|\eta\|\leqslant\bar{r}$，则当$t>t_0+T(\bar{r},\underline{r})\triangleq t_1$时

$$\dot{V}_1\leqslant-\varepsilon^{-1}\lambda_0\lambda_{\max}^{-1}(P_2)V_1+O(\varepsilon,\delta).$$

这里$O(\varepsilon,\delta)$表示与ε,δ同阶. 而当ε充分小时有$\lambda_0>0$.

令$d_0=\varepsilon\lambda_0^{-1}\lambda_{\max}(P_2)O(\varepsilon,\delta)$，由定理1的证明方法知，对$\forall P_0>0$，有$T(d_0+p_0,\bar{r})$，使当$t\geqslant t_1T(d_0+p_0,\bar{r})$时

$$V_1\leqslant\varepsilon\lambda_0^{-1}\lambda_{\max}(P_2)O(\varepsilon,\delta)+p_0\varepsilon,$$

则有

$$\begin{aligned}\|\eta\|&\leqslant[\lambda_0\lambda_{\min}^{-1}(P_2)\lambda_{\max}(P_2)O(\varepsilon,\delta)+\lambda_{\min}^{-1}(P_2)p_0]^{1/2}\\&\leqslant O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0}),\quad t>t_1+T(d_0+p_0,\bar{r}).\end{aligned}$$

取$s=B_2^{\mathrm{T}}P_2\eta$，这里$\eta$为过$\eta_0$的解，显然有

$$\|s\|\leqslant O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0}),\quad t\geqslant t_0+T(\bar{r},\underline{r})+T'(d_0+p_0,\bar{r}),$$

而对εs求导得

$$\varepsilon\dot{s}=B_2^{\mathrm{T}}P_2A_{22}\eta+B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2v+B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2q+B_2^{\mathrm{T}}P_2O(\varepsilon).$$

当B_2满秩时$B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2$可逆，不妨设$B_2^{\mathrm{T}}P_2B_2=I$，则有

$$v=-q-B_2^{\mathrm{T}}P_2A_{22}\eta-B_2^{\mathrm{T}}P_2O(\varepsilon)+\varepsilon\dot{s},$$

将其代入(6a)得

$$\dot{x}=A_{11}^0x+(A_{12}-B_1B_2^{\mathrm{T}}P_2A_{22})\eta-B_1B_2^{\mathrm{T}}P_2O(\varepsilon)+\varepsilon B_1\dot{s}.$$

考察上系统解的变化情况，其初始时刻为$t_1=t_0+T(\bar{r},\underline{r})$，则

$$\|x(t_1)\|\leqslant\bar{r},$$

由于A_{11}^0是稳定阵，则存在$M>0,\alpha>0$使

$$\|\exp(A_{11}^0t)\|\leqslant M\exp(-\alpha t),$$

将解$x(t)$表示成积分形式且对$x(t)$两边取范数得

$$\begin{aligned}\|x(t)\|\leqslant{}&\bar{r}M\exp(-\alpha(t-t_1))+\|A_{11}^1\|O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+[O(\sqrt{p_0})]\\&+\varepsilon\|B_1B_2^{\mathrm{T}}P_2\|[\theta_1+\theta_2\bar{\gamma}+\theta_3O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+\theta_3O(\sqrt{p_0})]\\&+2\varepsilon\|B_1\|[O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0})]\\&+\varepsilon\|A_{11}^0\|\|B_1\|[O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0})].\end{aligned}$$

因此易知，当$t\to\infty$时有

$$\|x(t)\|\leqslant O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0}).$$

定理2　在定理1的条件下，存在充分小的ε^*对$\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$，在控制(9)作用下，从而系统(1)的解是最终有界的且有

$$\|x(t)\|\leqslant O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0}),$$
$$\|z(t)\|\leqslant O^{1/2}(\varepsilon,\delta)+O(\sqrt{p_0}).$$

注　由于p_0是任意的，因此可取p_0充分小. 由定理2知，在控制(9)作用下，只要δ充分小且奇异摄动参数ε也充分小，则闭环系统解将是最终有界的，且此界可充分小. 而这一点[3]中

结果无法保证.

4 数值例子

考虑如下系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(u(t)+q(t)), \tag{10a}$$

$$\varepsilon\begin{bmatrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0.1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(u(t)+q(t)). \tag{10b}$$

这里,扰动量 $q(t)=-10\sin(27t)$. 仿真中取初始值 $x_1(0)=2, x_2(0)=-1, z_1(0)=3, z_2(0)=2.5$. 考察 $\sqrt{x_1^2+x_2^2+z_1^2+z_2^2}$ 的变化情况.

依[3]中方法可设计控制 u 为

$$u=\frac{500x_2}{1+|50x_2|}. \tag{11}$$

图 1 是在控制(11)作用下且 $\varepsilon=0.01$ 时系统(10)动态响应仿真曲线,由本文方法可设计控制 u 为

$$u=-\begin{cases}12\operatorname{sgn}(z_2), & 当\ |z_2|>\delta,\\ \dfrac{12z_2}{\delta}, & 当\ |z_2|\leqslant\delta.\end{cases} \tag{12}$$

图 2 是在控制(12)作用下 $\varepsilon=0.01, \delta=0.01$ 时的仿真图,由本图 1,图 2 可以看到,在同样条件下,对本文研究的系统,利用控制(12)会得到更强的鲁棒性.

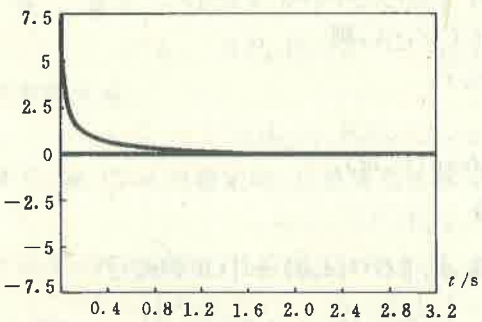

图 1 控制(11)作用下的响应曲线

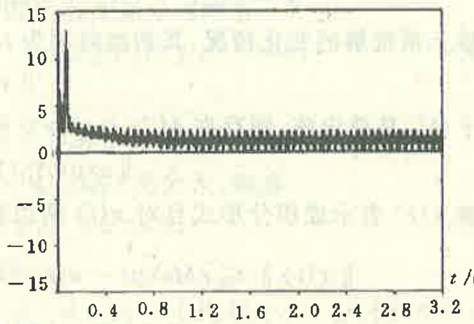

图 2 控制(12)作用下的响应曲线

5 结 论

本文对一类不确定奇异摄动系统给出了新的鲁棒控制设计方法. 仿真结果表明所给控制具有较强的抗干扰能力.

参 考 文 献

1 Garofalo, F.. Composite control of a singularly perturbed uncertain system with non-linearities. Int. J. Control. 1988, 48 (5): 1979—1991

2 Carofalo, F. and Leitmann, G.. A composite controller enduring ultimste bounfefness for a class of singularly perturbed uncertain systems. Dynam. Stability. Sys. 1988, 3: 135—145

3 Corless, M. et al.. New result on composite control of singularly perturbed uncertain linear systems. Automatica. 1993, 29 (2): 387—400

4 Chen, Y. H. and Leitmann, G.. Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions. Int. J. Control. 1987, 45(5): 1527－1542

Robust Control of Uncertain Systems with Singular Perturbation

YUE Dong

(College of Information and Electrical Engineering China University of Mining and Technology · Xuzhou, 221008, PRC)

GAO Cunchen and LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engmeering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: A class of singularly perturbed uncertain systems is considered in this paper, a new design method of robust control is presented. Simulation results show that the control given in this papwer has stronger robustness.

Key words: singularly perturbed sysytms; robust control; Lyapunov function; ultimate boundedness

本文作者简介

岳 东 见本刊 1997 年第 2 期第 248 页.

高存臣 见本刊 1997 年第 2 期第 248 页.

刘永清 见本刊 1997 年第 1 期第 33 页.