第 14 卷第 5 期
1997 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 5
Oct., 1997

# 具有完整性的状态反馈控制系统设计理论的研究*

王子栋　孙金生

(南京理工大学自动控制系·南京,210094)

**摘要**:本文研究具有完整性的状态反馈控制系统的设计方法,主要由两部分构成．第一部分考虑对任一传感器失效具有完整性且满足预先给定的 $H_\infty$ 干扰衰减指标约束的控制系统综合设计问题,利用代数 Riccati 方程方法,给出了该问题的解．第二部分则研究使闭环系统对传感器失效具有完整性的状态反馈控制的存在条件,并给出其显式表示及具体设计步骤．数值例子说明了本文设计方法的有效性与直接性．

**关键词**:容错控制;$H_\infty$ 控制;完整性;可靠性

## 1 引　言

容错控制的研究目前主要集中于三个方面,即控制冗余、系统重构和完整性设计．其中,完整性设计因其不需硬件冗余、不需故障检测与诊断、实时性强而成为容错控制的一种有力手段[1~2]．众所周知,$H_\infty$ 优化设计理论能有效地处理有被控对象模型误差时的鲁棒设计问题,故此本文第二节将研究同时满足完整性约束及 $H_\infty$ 干扰衰减指标约束的控制系统综合设计问题．本文第三节致力于研究使闭环系统具有完整性的状态反馈控制器的存在条件,以期为完整性设计的研究提供直接、简单的新途径．

## 2 $H_\infty$ 容错状态反馈控制系统设计

考虑如下线性定常系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \tag{2.1}$$

$$z(t) = C_1 x(t) + D_1 u(t), \tag{2.2}$$

$$u(t) = Kx(t). \tag{2.3}$$

其中,状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$,控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$,干扰 $w(t) \in \mathbb{R}^p$ 且能量有限,受控输出 $z(t) \in \mathbb{R}^q$. 为简化分析,作如下假定[3],$(A, B_2)$ 可控;$(A, C_1)$ 可观,$A$ 稳定,$D_1^{\mathrm{T}}[C_1 \quad D_1] = [0 \quad E]$,$E > 0$.

为表示传感器的可能失效,引入切换阵 $F$,将其置于控制器与状态之间,形式为

$$F = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \cdots, f_n). \tag{2.4}$$

其中 $f_i = 1$ 或 0 分别对应着第 $i$ 个传感器正常或失效,$i = 1, 2\cdots, n$. 则闭环系统成为

$$\dot{x}(t) = (A + B_2 KF)x(t) + B_1 w(t), \tag{2.5}$$

$$z(t) = (C_1 + D_1 KF)x(t). \tag{2.6}$$

用 $F_i$ 表示第 $i$ 个对角元素 $f_i = 0$ 而其余对角元素为 1 的对角阵,则本节考虑的 $H_\infty$ 容错控制问题可表述为寻找反馈控制器 $K$ 使得:1) 对任意 $i(i = 1, 2\cdots, n)$,闭环矩阵 $A + B_2 KF_i$ 保持渐近稳定. 2) 对任意 $i(i = 1, 2, \cdots, n)$,系统(2.5)(2.6)(其中 $F$ 由 $F_i$ 代替)满足 $H_\infty$ 干扰衰减指标约束,即 $\| C_0(sI - A_0)^{-1} B_1 \|_\infty < \gamma_\infty$,这里 $A_0 = A + B_2 KF_i$,$C_0 = C_1 + D_1 KF_i$,$\| H(s) \|_\infty \triangleq \max\{\sigma_{\max}(H(j\omega)); \omega \in \mathrm{R}\}$,$\sigma_{\max}(\cdot)$ 表示最大奇异值.

给定系统(2.1)～(2.3)及指标参数 $\gamma_\infty$,定义如下代数 Riccati 方程(简记为 ARE,且 $q > 0$

* 国家自然科学基金、高校博士点学科专项科研基金及南京理工大学科研发展基金资助课题．
本文于 1993 年 8 月 4 日收到. 1995 年 5 月 13 日收到修改稿.

为参数)：

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + \gamma_{\infty}^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P - PB_2E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 + qI = 0. \tag{2.7}$$

下面的引理给出了 ARE(2.7)存在对称解 $P \geqslant 0$ 的条件.

**引理 2.1**[4] 定义 Hamiltonian 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} -A & -\gamma_{\infty}^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}} + B_2E^{-1}B_2^{\mathrm{T}} \\ C_1^{\mathrm{T}}C_1 + qI & A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

若存在 $q > 0$ 使矩阵 $H$ 无纯虚特征值,则 ARE(2.7) 关于该 $q > 0$ 存在唯一对称解 $P \geqslant 0$.

**定理 2.1** 给定性能参数 $\gamma_{\infty} > 0$,若存在 $q > 0$,使得:ARE(2.7) 具有正定解 $P > 0$ 且满足

$$\max_{i=1,2,\cdots,n} [PB_2E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P]_{ii} < q. \tag{2.8}$$

其中$[\cdot]_{ii}$ 为矩阵$[\cdot]$的第 $i$ 个对角元素,则使闭环系统(2.5)(2.6)对任一传感器失效具有完整性,且满足给定 $\mathrm{H}_{\infty}$ 干扰衰减指标约束的状态反馈控制为:

$$u(t) = Kx(t), \quad K = -E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P. \tag{2.9}$$

证 任意取定 $i(i = 1,2,\cdots,n)$,首先证明如下不等式:

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \gamma_{\infty}^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_0^{\mathrm{T}}C_0 < 0. \tag{2.10}$$

注意到 $A = A_0 - B_2KF_i, C_0^{\mathrm{T}}C_0 = (C_1 + D_1KF_i)^{\mathrm{T}}(C_1 + D_1KF_i) = C_1^{\mathrm{T}}C_1 + F_iK^{\mathrm{T}}EKF_i$(由假设),将两式及 $K = -E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P$ 代入 ARE(2.7),且令 $M = PB_2E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P$,经整理得:

$$A_0^{\mathrm{T}}P + PA_0 + \gamma_{\infty}^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_0C_0^{\mathrm{T}} = M - F_iM - MF_i + F_iMF_i - qI.$$

据 $F_i$ 的定义,易见:矩阵 $M - F_iM - MF_i + F_iMF_i$ 是第 $i$ 个对角元素为 $M_{ii}$ 而其余元素均为 0 的对角矩阵,则由条件(2.8)可知,式(2.10)对任意 $i$ 均成立.

据(2.10)式,闭环矩阵 $A_0 = A + B_2KF_i$ 的渐近稳定性由 Lyapunov 稳定性理论直接可得,且由文献[5]中的引理 1 可知,对任意的 $\omega \in \mathbb{R}$,有

$$B_1^{\mathrm{T}}(-j\omega I - A_0^{\mathrm{T}})^{-1}C_0^{\mathrm{T}}C_0(-j\omega I - A_0)^{-1}B_1 < \gamma_{\infty}^2 I. \tag{2.11}$$

从而 $\mathrm{H}_{\infty}$指标约束 $\| C_0(sI - A_0)^{-1}B_1 \|_{\infty} < \gamma_{\infty}$ 得以满足. 证毕.

**说明** ARE(2.7)与文献[4]中的代数方程属同一类型,因而可利用逐次近似方法求解.

## 3 基于配置思想的容错控制系统分析

考虑如下线性定常状态反馈控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{3.1}$$

$$u(t) = Kx(t). \tag{3.2}$$

其中状态 $x(t) \in \mathbb{R}^n$,控制 $u(t) \in \mathbb{R}^m$,$(A,B)$ 可控. 与上节类似,引入切换阵 $F$,则系统的完整性要求可表述为:寻找状态反馈控制器 $K$ 使得闭环矩阵 $A + BKF$ 对所有可能的 $F$ 均保持渐近稳定.

**引理3.1**[6] 考虑系统(3.1),若取状态反馈控制为(3.2),则当满足条件 $\beta \leqslant 2\delta\lambda_m(p)]/[2\lambda_M(P)]$ 时,系统对任一传感器失效具有完整性. 其中 $\beta = \max\limits_i(\| BK(I - F_i) \|_s)$,$\lambda_M(\cdot)(\lambda_m(\cdot))$ 为最大(小)特征值,$\| \cdot \|_s$ 为矩阵的谱范数,$P$ 为 Lyapunov 方程

$$(A_c + \delta I)^{\mathrm{T}}P + P(A_c + \delta I) + qI = 0 \tag{3.3}$$

的正定解,这里 $A_c = A + BK$,$\delta \geqslant 0$ 及 $q \geqslant 0$ 为设计参数.

**说明** 引理 3.1 的结果不难推广至对任意 1 至 $n-1$ 个传感器失效具有完整性的情形. 由

引理3.1并不能直接得到控制器的设计途径,这主要因为求取使(3.3)式具有正定解的控制器$K$的集合比较困难.其它传统的方法,如最优调节器方法,也是间接的,需要选择许多合适的参数.

为此,我们采用所谓"配置控制"思想:称正定阵$P>0$可配置,如果Lyapunov方程(3.3)关于该$P>0$有解$K$;而"$P$-矩阵"配置问题则包含:1)找到$P>0$可配置的充要条件.2)找到相应的控制器$K$的集合.因为由充要条件可解出可配置矩阵的集合,这样,我们只需验证不等式$B\leqslant[q+2\delta\lambda_m(P)]/[2\lambda_M(P)]$,从而该"配置控制"的方法将便于计算机辅助设计,具有直接、有效的特点.

限于篇幅,我们不加证明地给出如下结果,其证明大致思路可参见文献[7].

**定理3.1** 正定矩阵$P>0$可配置当且仅当

$$(I-BB^+)[(A+\delta I)^{\mathrm{T}}P+P(A+\delta I)+qI](I-BB^+)=0. \tag{3.4}$$

其中$B^+$表示矩阵$B$的Moore-Penrose广义逆.

**说明** 注意到(3.4)为关于$P$的线性矩阵方程,因而可利用文献[8]提供的方法求解.

**定理3.2** 若矩阵$P>0$可配置,则配置该矩阵$P$的控制器$K$可表示为

$$\begin{aligned}K=&-\frac{1}{2}B^+[(A+\delta I)^{\mathrm{T}}P+P(A+\delta I)+qI](2I-BB^+)P^{-1}\\&+B^+SBB^+P^{-1}+(I-B^+B)Z.\end{aligned} \tag{3.5}$$

其中$S$为任意适维反对称阵,$Z$为任意适维矩阵.

**说明** 由引理3.1及定理3.2可容易得到具有完整性的容错控制器的解集.

## 4 设计实例

**例1** 考虑线性定常系统(2.1)~(2.3),其中参数

$$A=\begin{bmatrix}1.625&1.375\\0.5&-2\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\quad D_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

现欲设计控制律$u=Kx$使得对$i=1,2$,闭环矩阵$A+B_2KF_i$渐近稳定且$\|(C_1+D_1KF_i)(sI-A-B_2KF_i)^{-1}B_1\|_\infty<1$.据第二节结果,取$q=2$,此时矩阵$H$无纯虚特征根,再解ARE(2.7)得$P=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$且$\max\limits_{i=1,2}[PB_2E^{-1}B_2^{\mathrm{T}}P]_{ii}=1<2=q$,从而由(2.9)得期望$\mathrm{H}_\infty$容错控制器为$K=[-1\quad -1]$.

进一步,为验证闭环系统对于建模误差的鲁棒性,将系统矩阵$A$换为$\widetilde{A}$:$\widetilde{A}=A+\Delta A(\sigma)$且$\Delta A(\sigma)=\mathrm{diag}(0.5\sin\sigma,0.5\cos\sigma)$.对于不确定闭环系统(2.5)(2.6)(其中$A$用$\widetilde{A}$代替),下面的图1,2给出系统初始条件为$x(0)=[8\quad 5]^{\mathrm{T}}$的零输入响应曲线,其中曲线①②③分别对应传感器正常、传感器$x_1$失效、传感器$x_2$失效的情形.仿真结果表明不确定系统在任一传感器失效时都稳定.

**例2** 考虑线性定常系统(3.1),其中参数

$$A=\begin{bmatrix}-2.5&1&1.5\\0&-2.2&1.2\\0&0&-1.8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

据第三节结果,取$\delta=0$,$q=2.2$,解线性矩阵方程(3.4)并在(3.5)中取$S=0$,$Z=0$得

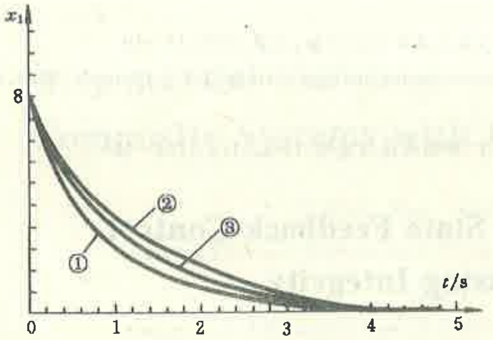


图 1　状态 $x_1$ 的零输入响应曲线

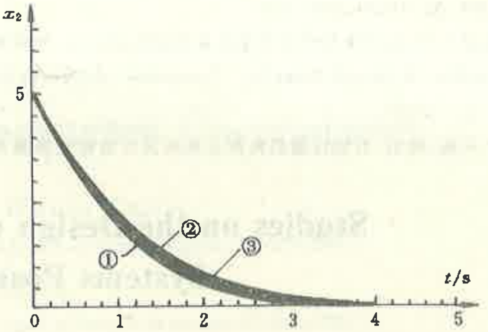


图 2　状态 $x_2$ 的零输入响应曲线

$$P=\begin{bmatrix}0.44 & 0.093617 & 0.179614\\ 0.093617 & 0.497099 & 0.229139\\ 0.179614 & 0.229139 & 0.857994\end{bmatrix},$$

$$K=\begin{bmatrix}0 & -0.232166 & -0.05649\\ 0 & -0.05649 & 0.141186\end{bmatrix},$$

因 $\beta=\max\limits_{i=1}^{3}(\|BK(I-F_i)\|_s)=0.238939<[q+2\delta\lambda_m(P)]/[2\lambda_M(P)]=1.05995$，由引理3.1知 $K$ 即为所求的容错控制器. 图 3,4,5 是系统初始条件为 $x(0)=[4\quad 2\quad 3]^T$ 时的零输入响应曲线，其中曲线①②③④分别为系统正常及传感器 $x_1,x_2,x_3$ 失效时的情形. 仿真结果验证了系统的完整性.

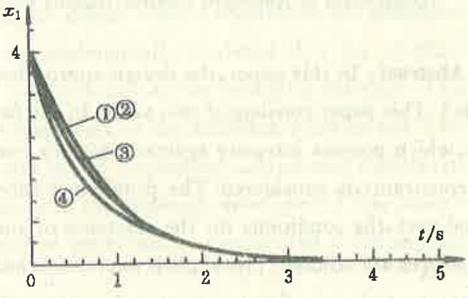


图 3　状态 $x_1$ 的零输入响应曲线

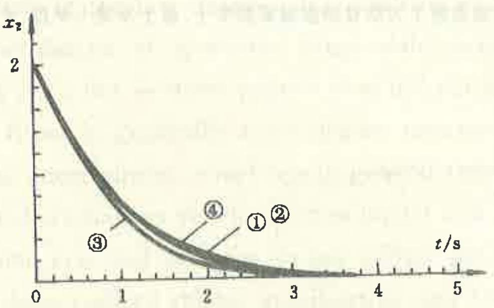


图 4　状态 $x_2$ 的零输入响应曲线

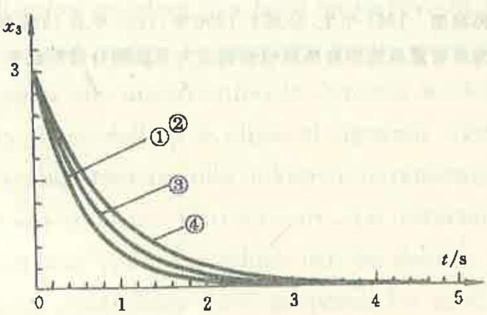


图 5　状态 $x_3$ 的零输入响应曲线

## 参 考 文 献


1 Fujita, M. and Shimemura, E.. A new type of linear state feedback control possessing integrity based on a solution of generalized riccati-type equation. Control Theory and Advanced Technology, 1986, 2(4): 563−575

2 Shieh, L. S. et al.. Optimal pole-placement for state-feedback systems possessing integrity. Int. J. Systems Sci., 1988, 19 (8): 1419−1435

3 Doyle, J. C. et al.. State-space solutions to standard $H_2$ and $H_\infty$ control problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(8): 831−847

4 Gohberg, I. et al.. On hermitian solutions for the symmetric algebraic riccati equation. SIAM J. Contr. Optim., 1986, 24 (6): 1323−1334

5 Willems, J. C.. Least square stationary optimal control and the algebraic riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr.,

1971,AC-16(2):621—634

6 孙金生等.具有完整性的状态反馈控制系统设计.控制理论及其应用年会论文集,太原,1993,16—19

7 Skelton,R. E. and Ikeda,M.. Covariance controllers for linear continuous-time systems. Int. J. Control. ,1989,49(5):1773—1785

8 王子栋,郭治.双线性随机离散系统的协方差配置控制及设计.控制理论与应用,1994,11(2):153—160

# Studies on the Design of State Feedback Control Systems Possessing Integrity

WANG Zidong and SUN Jinsheng

(Department of Automatic Control,Nanjing University of Science and Technology · Nanjing,210094,PRC)

**Abstract**: In this paper,the design approaches to state feedback control systems possessing integrity are studied. This paper consists of two parts. In the first part,the problem of designing state feedback control systems,which possess integrity against arbitrary a sensor failure and meet the specified $H_\infty$ disturbance attenuation constraint,is considered. The problem is solved by using the algebraic Riccati equation approach. In the second part,the conditions for the existence of state feedback controllers which possess integrity against sensor failures are studied. The explicit expression and direct design method of desired controllers are also given. Two numerical examples are presented to show the effectiveness of the proposed design approaches.

**Key words**: fault-tolerant control; $H_\infty$ control; integrity; reliability

## 本文作者简介

**王子栋** 见本刊1997年第1期第111页.

**孙金生** 1967年生.分别于1990年、1992年及1995年在南京理工大学自动控制系获学士、硕士及博士学位.主要研究领域为多变量系统的鲁棒容错控制及大系统的分散控制等.