第 14 卷第 5 期 控制理论与应用 Vol. 14, No. 5
1997 年 10 月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Oct., 1997

用多元有理函数矩阵研究系统的结构性质*

鲁凯生

(武汉交通科技大学轮机自动化·武汉,430063)

摘要：本文着重介绍了各种结构化矩阵,经比较,说明多元有理函数矩阵(RFM)能真实地描述线性物理系统. 通过对多元有理函数域 $F(z)$ 上的能控能观性的讨论,说明 RFM 是研究与系统结构相关性质的有力工具,也说明了研究 $F(z)$ 上能控能观性的必要性.

关键词：多元有理函数矩阵；结构能控能观；域 $F(z)$ 上能控能观；线性物理系统

1 问题的提出

由于目前的线性系统理论主要是建立在实数域上的矩阵的知识上的,而实数域上的矩阵不便于研究系统的结构,因此,对于由系统结构决定的那些性质,至今还了解得很少. 为了探讨系统结构决定的性质,首先要确定描述系统结构的方法.

在研究线性系统结构能控能观的过程中出现了各种各样的结构化矩阵(或者说参数化矩阵). 文[1]提出了一种结构化矩阵(SM:Structured Matrix). SM 是这样的矩阵:矩阵中的元素要么是固定的零,要么是独立的非零. 文[2,3]允许在非固定元素间存在依赖关系,这些非固定元素是独立参量的一次多项式. 文[4]研究了所谓的混合矩阵. 若矩阵 T 的非零元素在矩阵 Q 的元素所属的域上代数独立,那么称 $A=Q+T$ 为混合矩阵. 文[5]研究了列结构矩阵(CSM)的性质. CSM 是介于 SM 和 RFM(有理函数矩阵)之间的. RFM 是元素多个参量的有理函数的一种矩阵. 除 RFM 之外,以上各种结构矩阵都很难真实地描述线性物理系统的结构,所以这些研究只局限于数学上而难以应用于工程. 例如图 1 所示的 RC 电网络,其动态方程为:$\dot{X}=AX+bu, y=CX$,其中 $X=(v_1,v_2)'$, v_1 和 v_2 是分别加在电容器 C_1 和 C_2 上的电压, $y=v_2$, $C=(0,1)$,

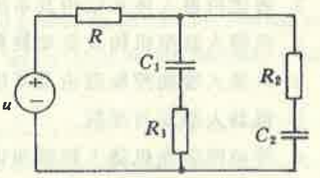

图 1 RC 网络

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{-(R_2+R)}{R_1R_2C_1+RR_2C_1+RR_1C_1}, & \dfrac{R}{R_1R_2C_1+RR_2C_1+RR_1C_1}\\ \dfrac{R}{R_1R_2C_2+RR_1C_2+RR_2C_2}, & \dfrac{-(R_2+R)}{R_1R_2C_2+RR_1C_2+RR_2C_2}\end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix}\dfrac{R_2}{R_1R_2C_1+RR_2C_1+RR_1C_1}\\ \dfrac{R_1}{R_1R_2C_2+RR_1C_2+RR_2C_2}\end{bmatrix}.$$

这里独立参量应该是 5 个物理参量:电阻 R,R_1,R_2,电容 C_1,C_2. 那么,实数域上的矩阵,SM, CSM 参量的一次多项式矩阵、混合矩阵都不能完全描述此网络. 而此网络的所有系数矩阵都是 RFM. 这样的系统称为有理函数域上的系统,或简称有理函数系统. 可见,对有理函数系统

* 国家和湖北省自然科学基金资助项目.
本文于 1996 年 1 月 30 日收到. 1996 年 10 月 3 日收到修改稿.

的研究是既有数学意义又有物理意义的工作. 显然，实数域上的矩阵，SM，CSM 参量的一次多项式矩阵以及混合矩阵都可考虑成一类有理函数矩阵，所以对有理函数系统的研究所获得的结论适用的范围更加广泛.

考虑一线性定常系统(本文简称线性系统)

$$\dot{X} = AX + BU, \quad Y = CX + DU, \tag{1}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n$, $U \in \mathbb{R}^g$, $Y \in \mathbb{R}^e$. 设该系统含 q 个独立参量 $z_1, \cdots, z_q$. 令 $z = (z_1, \cdots, z_q) \in \mathbb{R}^q$, $\mathbb{R}^q$ 称为参量空间. 令 $F(z)$ 表示 q 个参量 $z_1, \cdots, z_q$ 的一切有理函数构成的域, $F(z)[\lambda]$ 表示以 $F(z)$ 中的元为系数的 λ 的多项式环. 令 $M(z)$ 表示一 $m \times n$ 矩阵. 若 $M(z)$ 中的每一元素都是域 $F(z)$ 中的元，就称 $M(z)$ 为有理函数矩阵(RFM)或者域 $F(z)$ 上的矩阵；若系数矩阵 A, B, C 和 D 都是 RFM，那么称(1)式描述的系统为有理函数系统(RFS)或者为域 $F(z)$ 上的系统，称(1)式为域 $F(z)$ 上的状态方程.

应该特别指出的是：域 $F(z)$ 上成立的性质只与系统的结构有关与参量 z 的取值无关，这是因为对域 $F(z)$ 上成立的性质参量 z 是从不取值的. 因此 RFM 和 RFS 是研究系统结构性质的有力工具.

近年来，文[6～8]用 RFM 和 RFS 描述并研究了系统结构的某些性质. 下面介绍 $F(z)$ 上的能控能观性.

2　$F(z)$上的能控能观性

设(1)描述的是一 $F(z)$ 上的系统(RFS). 令

$$T = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B), \quad T_0 = (C', A'C', \cdots, A'^{n-1}C')'$$

分别是系统的能控性和能观性矩阵. 因为 A, B 和 C 都是 RFM，所以 T 和 T_0 的元素是 z 的有理函数，它们可表示成 $T(z)$ 和 $T_0(z)$. 令集合

$$M = \{z \in \mathbb{R}^q \mid \det(T(z)T'(z)) = 0\}, \quad N = \{z \in \mathbb{R}^q \mid \det(T'_0(z)T_0(z)) = 0\},$$

这里 $\det(T(z)T'(z))$ 表示矩阵 $T(z)T'(z)$ 的行列式, $T'(z)$ 表示 $T(z)$ 的转置矩阵.

定义 1　若点集 M 的 Lebesgue 测度为零(表为 $m^*M = 0$)，那么称系统(1)为结构能控的；否则是结构不能控的. 若点集 N 的 Lebesgue 测度为零($m^*N = 0$)，那么称系统(1)是结构能观的；否则是结构不能观的.

定义 2　若 $\det(T(z)T'(z)) \neq 0$(即 $\det(T(z)T'(z))$ 是 $F(z)$ 中的非零元)，那么称系统(1)是域 $F(z)$ 上能控的；否则是 $F(z)$ 上不能控的. 若 $\det(T'_0(z)T_0(z)) \neq 0$，那么称系统(1)是域 $F(z)$ 上能观的；否则是 $F(z)$ 上不能观的.

引理 1　设 $f(z) \in F(z)$，则要么在参量空间 $\mathbb{R}^q$ 中 $f(z) \equiv 0$(即 $f(z)$ 是 $F(z)$ 中的零元素)，要么 $m^*\{z \in \mathbb{R}^q \mid f(z) = 0\} = 0$(即 $f(z)$ 是 $F(z)$ 中的非零元).

根据代数理论，引理成立是明显的.

由定义 1 和 2 以及引理 1 可知结构能控能观性等价于域 $F(z)$ 上的能控能观性.

例 1　再考虑图 1 中的 RC 网络, $z = (R, R_1, R_2, C_1, C_2) \in \mathbb{R}^5$，网络是一 RFS. 若取电阻 $R = R_1 = R_2 = 10\text{k}\Omega$，电容 $C_1 = C_2 = 100/3\mu\text{F}$，那么网络变成了实数域上的网络：$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = (0, 1)$，显然这时网络是不完全能控的. 但是 $F(z)$ 上的网络的行列式 $\det(b, Ab)$ 和 $\det\begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$ 都是 $F(z)$ 中的非零元，所以网络是 $F(z)$ 上能控能观的，即结构能控能观的. 那么使得网络不能控不能观的点(如点 $\bar{z} = (10^4, 10^4, 10^4, 10^{-4}/3, 10^{-4}/3)$)的集

合的测度等于零．换句话说，如果在$\mathbb{R}^5$中随意地取参量值，网络能控能观的概率为1，这意味着网络实际上总是能控能观的．

另外，若一个RFS不是$F(z)$上能控能观的，那么在参量空间$\mathbb{R}^q$中处处都不是能控能观的．于是我们获得一个重要结论：

定理1 一个RFS实际上总是能控能观的当且仅当它是域$F(z)$上能控能观的，即结构能控能观的．

由此可见，研究域$F(z)$上的能控能观性是非常必要的．文[6,7]研究了这方面的问题．

参 考 文 献

1 Lin, C. T.. Structural controllability. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, AC-19(3): 201—208

2 Corfmat, J. P. and Morse, A. S.. Structural controllability and structurally canonical systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21: 129—131

3 Anderson, B. B. O. and Hong, H. M.. Structural controllability and matrix nets. Int. J. Control, 1982, 35:397—416

4 Murota, K.. On the irreducibility of layered mixed matrices. Linear Multi-Linear Algebra, 1989, 24:273—288

5 Yamada, T. and Luenberger D. G.. Generic properties of column-structured matrices. Linear Algebra and Appl., 1985, 65:186—206

6 Lu, K. S.. Some results for controllability in F_ξ. Proc. IEEE 32nd CDC., 1993:1365—1366

7 Lu, K. S. and Wei, J. N.. Rational function matrices and structural controllability and observability. IEE Proc. —D, 1991, 138(4):388—394

8 Lu, K. S. and Wei, J. N.. Reducibility condition of a class of rational function matrices. SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1994, 15(1):151—161

Investigation on Structural Properties of Systems in Terms of Rational Function Matrices in Multi-Parameters

LU Kaisheng

(Department of Marine Engine Automation, Wuhan Transportation University • Wuhan, 430063, PRC)

Abstract: This paper introduces various structured matrices in detail, indicates that rational function matrices (RFM) and systems (RFS) in multi-parameters can describe linear physical systems with reality, discusses the controllability and observability over the field $F(z)$ of all the rational functions in multi-parameters, and shows that RFM and RFS are a powerful tool to study structured properties of systems such as structural controllability and observability and it is necessary to investigate controllability and observability over $F(z)$.

Key words: rational function matrix in multi-parameters; structural controllability and observability; controllability and observability over $F(z)$; linear physical systems

本文作者简介

鲁凯生 1946年生．分别于1970年、1980年毕业于武汉交通科技大学船舶机械工程专业和船舶港口电气化自动化专业．现为武汉交通科技大学轮机自动化教授，目前主要研究兴趣为多元有理函数域上的线性系统理论，计算机控制系统，非线性控制系统．