第14卷第5期
1997年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 5
Oct., 1997

一类线性不确定组合系统的鲁棒控制器和观测设计*

卢立磊　高立群　张嗣瀛

(东北大学自动控制系·沈阳，110006)

摘要：本文研究了一类带有结构不确定性的线性组合系统的鲁棒控制器和观测器设计问题，文中给出一种设计分散控制器和分散观测器的方法．其中状态反馈增益阵和观测器增益阵由两个黎卡提方程的解给出．

关键词：状态观测器；稳定性；分散控制

1 引　言

近年来，设计线性不确定系统的鲁棒控制器产生了许多方法，对于组合系统，[1]中研究了分散反馈控制器的设计，并给出一种算法．当系统的状态不能完全获得时，状态观测器的设计就是十分必要的了．[2]中每个观测器的实现利用了整个系统的状态，然而把各个子系统的信息传输到某处进行处理常受到经济、计算以及实际情况的限制．本文就这一问题作了讨论，指出对文[3]中提出的一类特殊结构的组合系统可以设计出分散观测器．当匹配条件不满足时，[4,5]对一般的线性系统已讨论过，对于组合系统不满足匹配条件时本文也给出一种方法，使得按照匹配条件设计出的控制律仍能稳定不满足匹配条件的系统．

2 系统描述及问题

考虑[3]中的组合系统，当带有不确定参数时，第 i 个子系统可以描述为

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= [A_i + \Delta A_i(r(t))]x_i(t) + B_iu_i(t) + H_i\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{N}[H_{ij} + \Delta H_{ij}(r(t))]x_i(t),\\ y_i(t) &= C_{i1}x_i(t) + C_{i2}\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{N}H_{ij}x_j(t),\quad i = 1,2\cdots,N,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}^{m_i}, y_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ 分别是状态、输入和输出向量．$A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, B_i \in \mathbb{R}^{n_i\times m_i}, C_{i1} \in \mathbb{R}^{q_i\times n_i}, C_{i2} \in \mathbb{R}^{q_i\times p_i}, H_i \in \mathbb{R}^{n_i\times p_i}, H_{ij} \in \mathbb{R}^{p_i\times n_j}$ 是第 i 个子系统的标称参数矩阵．$\Delta A_i(r(t)) \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}, \Delta H_{ij}(r(t)) \in \mathbb{R}^{p_i\times n_j}$ 是时变不确定的连续数矩阵．而且 $\sum_{i=1}^{N}n_i = n$，$\sum_{i=1}^{N}m_i = m$，$\sum_{i=1}^{N}q_i = q$．

设系统(1)满足以下假设

A1) $r(t)$ 勒贝格可测且属于已知的紧集．A2) (A_i,B_i) 可控，(A_i,C_i) 可观．

A3) 满足有工程意义的匹配条件[1]，即 $\Delta A_i = B_iG_i(r(t)), H_i\Delta H_{ij} = B_iG_{ij}(r(t))$．

下面考虑第 i 个子系统的状态观测器

$$\dot{z}_i(t) = A_iz_i(t) + B_iu_i(t) + L_i[y_i(t) - C_{i1}z_i(t)].\tag{2}$$

其中 L_i 是观测器增益阵，$L_i \in \mathbb{R}^{n_i\times q_i}$；$z_i(t)$ 是状态估计值．定义 $e_i(t) \triangleq x_i(t) - z_i(t)$ 则

$$\begin{aligned}\dot{e}_i(t) = {} & A_ie_i(t) - L_iC_{i1}e_i(t) + (H_i - L_iC_{i2})\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{N}H_{ij}x_j(t) + \Delta A_ix_i(t)\\ & + H_i\sum\nolimits_{j=1,j\neq i}^{N}\Delta H_{ij}x_i(t).\end{aligned}\tag{3}$$

---

* 国家自然科学基金、国家教委博士点基金、辽宁省自然科学基金资助项目．
本文于1995年4月3日收到．1997年4月14日收到修改稿．

如[3]中所设$q_i > p_i$,不失一般性$C_{i2}^{\mathrm{T}} = [I_{pi} \quad 0]$,,相应的$L_i = [l_{i1} \quad l_{i2},]$,$C_{i1}^{\mathrm{T}} = [C_{i3}^{\mathrm{T}} \quad C_{i4}^{\mathrm{T}}]$. 其中 $L_{i1} \in \mathbb{R}^{n_i \times p_i}$,$L_{i2} \in \mathbb{R}^{n_i \times (q_i - p_i)}$,$C_{i3} \in \mathbb{R}^{p_i \times n_i}$,$C_{i4} \in \mathbb{R}^{(q_i - p_i) \times n_i}$. 令 $H_i - L_i C_{i2} = 0$,即 $H_i - [L_{i1} \quad L_{i2}][I_{pi} \quad 0]^{\mathrm{T}} = 0$,从而 $H_i = L_{i1}$. (3) 式可以变为

$$\dot{e}_i(t) = (A_i - H_i C_{i3} - L_{i2} C_{i4}) e_i(t) + \Delta A_i x_i(t) + H_i \sum\nolimits_{j=1, j\neq i}^{N} \Delta H_{ij} x_i(t). \tag{4}$$

由匹配条件,(1)可简写为

$$\dot{x}(t) = [A + BG(r(t))]x(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{5}$$

这里 $x = [x_1^{\mathrm{T}}\, x_2^{\mathrm{T}} \cdots x_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,$u = [u_1^{\mathrm{T}}\, u_2^{\mathrm{T}} \cdots u_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$,$y = [y_1^{\mathrm{T}}\, y_2^{\mathrm{T}} \cdots y_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^q$,$B = \mathrm{diag}[B_1\, B_2 \cdots B_N] \in \mathbb{R}^{n \times m}$,$C = (C_{ij}) \in \mathbb{R}^{q \times n}$,$G = (G_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$,$(i = 1, 2, \cdots, N)$.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & H_1 H_{12} & \cdots & H_1 H_{1N} \\ H_2 H_{21} & A_2 & \cdots & H_2 H_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_N H_{N1} & H_N H_{N2} & \cdots & A_N \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} \Delta A_1 & H_1 \Delta H_{12} & \cdots & H_1 \Delta H_{1N} \\ H_2 \Delta H_{21} & \Delta A_2 & \cdots & H_2 \Delta H_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_N \Delta H_{N1} & H_N \Delta H_{N2} & \cdots & \Delta A_N \end{bmatrix}.$$

同时式(4)可简写为

$$\dot{e}(t) = (A_0 - HC_3 - L_2 C_4) e(t) + \Delta A(r(t)) x(t),$$

其中$e = [e_1^{\mathrm{T}}\, e_2^{\mathrm{T}} \cdots e_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$,$A_0 = \mathrm{diag}[A_1\, A_2 \cdots A_N] \in \mathbb{R}^{n \times n}$,$H = \mathrm{diag}[H_1\, H_2 \cdots H_N] \in \mathbb{R}^{n \times p}$,$C_3 = \mathrm{diag}\,[C_{13}\, C_{23} \cdots C_{N3}] \in \mathbb{R}^{p \times n}$,$C_4 = \mathrm{diag}\,[C_{14}\, C_{24} \cdots C_{N4}] \in \mathbb{R}^{(q-p) \times n}$,$L_2 = \mathrm{diag}\,[L_{12}\, L_{22} \cdots C_{N2}] \in \mathbb{R}^{n \times (q-p)}$.

引入状态反馈 $u(t) = Kz(t)$,$K \in \mathbb{R}^{m \times n}$,于是得到闭环不确定系统($\Sigma_c$) 的状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A_0 - HC_3 - L_2 C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A(r(t)) & 0 \\ 0 & \Delta A(r(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

定义 1 引入李雅普诺夫函数 $V(x,e) = x^{\mathrm{T}} P_c x + e^{\mathrm{T}} P_0 e$,其中 $P_c^{\mathrm{T}} = P_c > 0$,$P_0^{\mathrm{T}} = P_0 > 0$. ($\Sigma_e$) 是二次渐近稳定的,是指存在一个常数 $a > 0$,满足 $L(x,e) \triangleq \dot{V}(x,e) \leqslant -\alpha(\|x\|^2 + \|e\|^2)$.

3 主要结果

定理 1 考虑两个黎卡提方程

$$(A + \beta_1 I)^{\mathrm{T}} P_c + P_c (A + \beta_1 I) - P_c B \gamma_1^{-1} B^{\mathrm{T}} P_c + 2Q = 0, \tag{7}$$

$$S(A_0 + \beta_2 I)^{\mathrm{T}} + (A_0 + \beta_2 I) S - \gamma^{-1} S C_4^{\mathrm{T}} C_4 S + BB^{\mathrm{T}} = 0, \tag{8}$$

其中$\gamma_1 = (\alpha - 1)^{-1}$,$Q \geqslant G^{\mathrm{T}} G + \varepsilon I$. 这里$\varepsilon > 0$,$\beta_1 > 0$,$\beta_2 > 0$,$\gamma > 0$,$\alpha > 1$均由设计者选择. 设 $P_c^{\mathrm{T}} = P_c > 0$,$S^{\mathrm{T}} = S > 0$ 分别为方程(7),(8) 的解. 如果 P_c,$P_0 = S^{-1}$ 满足不等式

$$M = -2\beta_2 P_0 - 2P_0 HC_3 - \gamma^{-1} C_4^{\mathrm{T}} C_4 + \alpha P_c BB^{\mathrm{T}} P_c < 0, \tag{9}$$

则 $K = -\alpha B^{\mathrm{T}} P_c$,$L_2 = P_0{}^{-1} \gamma^{-1} C_4^{\mathrm{T}}$ 使得(Σ_e) 二次渐近稳定.

证 将 K,L_2 代入 $L(x,e)$ 可知

$$L(x,e) = x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}} P_c - 2\alpha P_c BB^{\mathrm{T}} P_c + G^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_c + P_c A + P_c BG]x + e^{\mathrm{T}}[A_0^{\mathrm{T}} p_0 + P_0 A_0]e$$
$$-e^{\mathrm{T}}[2P_0 HC_3 + 2\gamma^{-1} C_4^{\mathrm{T}} C_4]e + 2e^{\mathrm{T}} \alpha P_c BB^{\mathrm{T}} P_c x + x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 e + e^{\mathrm{T}} P_0 BGx.$$

因为对任意实矩阵 X 和 Y,有 $X^{\mathrm{T}} Y + Y^{\mathrm{T}} X \leqslant X^{\mathrm{T}} X + Y^{\mathrm{T}} Y$ 所以

$$x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} B^{\mathrm{T}} P_0 e + e^{\mathrm{T}} P_0 BGx \leqslant x^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} Gx + e^{\mathrm{T}} P_0 BB^{\mathrm{T}} P_0 e,$$

$$2\alpha e^{\mathrm{T}} P_c BB^{\mathrm{T}} P_c e \leqslant 2\alpha x^{\mathrm{T}} P_c BB^{\mathrm{T}} P_c x + \alpha e^{\mathrm{T}} P_c BB^{\mathrm{T}} P_c e.$$

进而有

$$L(x,e) \leqslant x^{\mathrm{T}}[A^{\mathrm{T}} P_c - \alpha P_c BB^{\mathrm{T}} P_c + 2G^{\mathrm{T}} G + P_c A + BB^{\mathrm{T}} P_c]x$$

$$+ e^{\mathrm{T}}[A_0^{\mathrm{T}}P_0 + P_0A_0 - 2P_0HC_3 - 2\gamma^{-1}C_4^{\mathrm{T}}C_4 + \alpha P_cBB^{\mathrm{T}}P_c + P_0BB^{\mathrm{T}}P_c]e.$$

由(7),(8)和不等式(9)得

$$L(x,e) \leqslant -2\beta_1x^{\mathrm{T}}P_cx + e^{\mathrm{T}}[-2\beta_2P_0 - 2P_0HC_3 - \gamma^{-1}C_4^{\mathrm{T}}C_4 + \alpha P_cBB^{\mathrm{T}}P_c]e$$
$$\leqslant -2\beta_1x^{\mathrm{T}}P_cx \leqslant -2\beta_1\lambda_{\min}[P_c]\|x\|^2.$$

注 1　因(A_i,B_i)可控,所以(8)式存在正定对称解P_0^{-1},在(8)式中因各矩阵都是块对角阵,此时可解每个子系统的黎卡提方程．根据文献[6]中的分析,可看出调整(8)中γ^{-1}的值将会影响S的变化,当γ^{-1}增大时,S变小,从而P_0增大使M更趋负定．

按定理1设计的控制器不是分散形式,为得到分散控制律,有下面的推论1和注2.

推论 1　若方程(7)中$Q\geqslant G^{\mathrm{T}}G+\varepsilon I+\dfrac{V^{\mathrm{T}}V}{2\eta}$($\varepsilon>0,\eta>0$由设计者选择),$\gamma_1=\dfrac{1}{\alpha-1-\eta}$时的解为$P_c$,且方程(8)的解为$S$,取$P_0^{-1}=S$,则不等式(9)成立时$K=V-\alpha B^{\mathrm{T}}P_c,L_2=P_0^{-1}\gamma^{-1}C_4^{\mathrm{T}}$使$(\Sigma)$二次渐近稳定,这里$V\in\mathbb{R}^{m\times n}$是设计者选择的矩阵．

此推论由定理1的证明过程易得．

注 2　当V取offblock-diag时,扩展[1]的算法可实现分散控制(具体算法略).

为了讨论不满足匹配条件时的情况,引用[4]中的定义并稍作改变．

定义 2　系统(5)可分解指的是存在连续的矩阵函数,使下述条件成立

1) $\Delta(r(t))=\Delta A_m(r(t))+\Delta A_n(r(t))$.

2) 对系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t)&=[A+\Delta A_m(r(t))]x_m(t)+Bu(t),\\ \dot{e}_m(t)&=[A_0-HC_3-L_2C_4]e_m(t)+\Delta A_m(r(t))x_m(t),\end{aligned}\tag{10}$$

存在反馈律$u_m(t)=K_mz(t),K_m\in\mathbb{R}^{m\times n}$,使(10)二次渐近稳定．

文[4]给出一种分解方法:$\Delta A_m(r(t))=BG(r(t)),\Delta A_n(r(t))=\Delta A(r(t))-BG(r(t))$,其中$\Delta A_m(r(t))$是满足匹配条件的部分,$\Delta A_n(r(t))$是不满足匹配的部分．

定义 3　设分解后的系统(10)存在$\alpha>0$及$P_c^{\mathrm{T}}=P_c>0,P_0^{\mathrm{T}}=P_0>0$满足

$$L_m(x,e)=x_m^{\mathrm{T}}[(A+\Delta A_m)^{\mathrm{T}}P_c+P_c(A+\Delta A_m)]x_m+2e_m^{\mathrm{T}}P_0\Delta A_mx_m+2x_m^{\mathrm{T}}P_cBK_me_m$$
$$+e_m^{\mathrm{T}}[(A_0-HC_3-L_2C_4)^{\mathrm{T}}P_0+P_0(A_0-HC_3-L_2C_4)]e_m$$
$$\leqslant -\alpha(\|x_m\|^2+\|e_m\|^2),$$

则定义$T^*(P_c,\alpha)=\dfrac{\alpha}{2\lambda_{\max}[P_c]}$.

定理 2　设分解后的系统(10)存在$K_m=-\alpha B^{\mathrm{T}}P_c,L_{2m}=P_0^{-1}\gamma^{-1}C_4^{\mathrm{T}}$使其二次渐近稳定,其中$P_c$和$P_0^{-1}$分别为(7)和(8)的解,且$M+I>0$,则$T^*(P_c,\alpha)>T(P_c,P_0)$时$K_m$和$L_{2m}$仍能使分解前的原系统(5)渐近稳定,其中$\alpha=2\beta_1\lambda_{\min}[P_c]$;$M$如定理1中定义

$$T(P_c,P_0)=\max\|\Delta A_n\|+\lambda_{\max}^2[P_0]\frac{(\max\|\Delta A_n\|)^2}{2\lambda_{\max}[P_c]}.$$

证　利用李雅普诺夫直接方法,有

$$L(x,e)=L_m(x,e)+2x^{\mathrm{T}}\Delta A_n^{\mathrm{T}}P_cx+e^{\mathrm{T}}P_0\Delta A_nx+x^{\mathrm{T}}\Delta A_n^{\mathrm{T}}P_0e$$
$$\leqslant L_m(x,e)+2\lambda_{\max}[P_c](\max\|\Delta A_n\|)\|x\|^2+e^{\mathrm{T}}e+x^{\mathrm{T}}\Delta A_n^{\mathrm{T}}P_0P_0\Delta A_nx.$$

将K_m,L_{2m}代入,利用(7),(8)及(9)得

$$L(x,e)\leqslant\{-2\beta_1\lambda_{\max}[P_c]+2\lambda_{\max}[P_c]\max(\|\Delta A_n\|)$$
$$+\lambda_{\max}^2[P_0](\max\|\Delta A_n\|)^2\}\|x\|^2+e^{\mathrm{T}}(M+I)e$$

$$= -2\lambda_{\max}[P_c]\{T^*(P_c,\alpha) - T(P_c,P_0)\}\|x\|^2 + e^T(M+I)e$$

$$< 0.$$

参 考 文 献

1 Trinh, H. and Aldeen, M.. Decentralized feedback controllers for uncertain ineronnected dynamic systems. IEE Proc. Control Theory and Appl., 1993, 140: 429—434

2 Sundarshan, M. K. and Paulc, K. Huang. On the design of a decentralized observation schem for large-scale systens. IEEE Trans. Automat. Contr., 1984, AC-29(3): 274—276

3 Sanders, C. W. et al.. A new class of decentralized filters for interconnected systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1974, AC-19(3): 259—262

4 Barmish and Leitman, G.. On ultimate boundedness control of untrol of uncertain systems in the absence of matching assumption. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27(2): 153—158

5 Shuh-Chuan Tsay. Robust linear quadratic optimal control for systems with linear uncertainty. Int. J. Control, 1991, 53(1): 81—96

6 Faryra Jabbari and Schmitendorf W. E.. Robust linear controllers using observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(12): 1509—1514

The Design of Robust Controllers and Observers for a Class of Linear Composite Systems with Uncertainties

LU Lilei, GAO Liqun and ZHANG Siying

(Deprtment of Automatic Control, Northeastern University · Shenyang, 110006, RPC)

Abstract: The problem of designing robust controllers and observers for a class of linear composite systems with structural uncertainties is investigated in this paper. A method is given to design decentralized controllers and decentralized observers. The state feedback gain matrix and observer gain matrix are obtained from two Riccati equations, respectively.

Key words: state observer; stability; decentralized control

本文作者简介

卢立磊 1972 年生．1996 年毕业于东北大学自控系，获硕士学位．现为青岛建筑工程学院计算机系教师．研究方向为复杂控制系统的结构分析与控制．

高立群 1949 年生．1984 年于东北工学院自控系研究生毕业，1987 年～1989 年在荷兰 Delft 工业大学学习，1990 年获博士学位．现为东北大学信息科学与工程学院教授．研究方向为对策理论及复杂系统的辨识与控制．

张嗣瀛 见本刊 1997 年第 4 期第 519 页．