一类非线性随机系统的自适应控制

魏 晨

(中国科学院系统科学研究所·北京,100080)

摘要：本文在文献[1,2]的基础上,对一类仿射非线性随机系统的最小二乘(LS)自适应控制问题进行了分析,给出了稳定性及收敛速度结果.在这里,我们仅要求非线性函数具有线性增长速度,而无需任何其它结构假设.

关键词：自适应控制；最小二乘；非线性随机系统；稳定性

1 引 言

迄今为止,线性随机系统的自适应控制在理论和应用方面已取得了非常大的进展.Guo & Chen 对最基础的自校正调节器(Åström-Wittenmark STR)的稳定性问题给出了彻底的解决[1].但对于非线性随机系统来讲,自适应控制的理论结果却很少.由于在实际系统中存在大量的非线性,因而,目前这方面的工作已吸引了人们大量的研究兴趣.可是,已取得的大部分结果都是针对连续时间系统的,离散时间系统的结果却很少.最近,Kanellokopoulos 通过在 LS 算法中引进加权序列,得到了一简单的一阶离散系统自适应控制的稳定性结果[4].但该文的主要局限是不能推广到高维和有噪声干扰情形.

本文将利用[1,2]的理论结果,对有噪声干扰的一类仿射非线性随机系统的自适应控制进行稳定性分析.在此,仅假定非线性函数具有线性增长速度,而无需任何其它结构假设.这种假设包括了死区(dead-zone)、后冲(backlash)、滞后(hysteresis)及分段线性等输入非线性情形,而这几种非线性特性在许多实际控制系统的物理结构中普遍存在,尤其是在诸如机械连接、液压伺服阀和伺服电动机的传动装置中更为普遍,而且在生物医学系统中也存在这种非线性[5].我们将证明,对这类非线性系统,自适应跟踪的收敛速度与线性情形下[2]得到的结果完全相同.

2 问题的提法

考虑下面的离散时间非线性随机系统：

$$y_{t+1}=\theta^{\mathrm{T}}f(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})+bg(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})u_t+w_{t+1}. \tag{1}$$

其中 y_t,u_t 和 w_t 分别是系统的输出、输入及噪声；$b\in\mathbb{R},\theta\in\mathbb{R}^d$ 分别为未知的参数及参数向量；$f\in\mathbb{R}^d,g\in\mathbb{R}$ 为定义在 $\mathbb{R}^{p+q-1}$ 上的、已知的非线性函数.

以下,记

$$\phi_t=[y_t\cdots y_{t-p+1},u_t\cdots u_{t-q+1}]^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

$$f_t=f(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1}),\quad g_t=g(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1}). \tag{3}$$

控制目的是选取反馈控制 u_t,使系统的输出信号跟踪 y_t^*.

为分析此控制问题,引入下列条件：

A1) 噪声 $\{w_t,\mathscr{F}_t\}$ 是鞅差序列(其中 $\{\mathscr{F}_t\}$ 是非降的子 σ- 代数序列),并且具有条件方差：

$$\mathrm{E}[w_{t+1}^2|\mathscr{F}_t]=\sigma^2>0\quad \text{a.s.}, \tag{4}$$

且存在 $\beta>2$,使

本文于 1995 年 9 月 19 日收到.1997 年 1 月 9 日收到修改稿.

$$\sup_t E[|w_{t+1}|^\beta|\mathscr{F}_t]<\infty \quad \text{a.s.};\tag{5}$$

A2)（非线性最小相位条件）存在 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$u_{t-1}^2=O\Big(\sum_{i=0}^{t}\lambda^{t-i}(y_i^2+w_i^2)\Big);$$

A3) $\{y_t^*\}$ 是确定性有界信号；

A4) 存在 $K_1,K_2>0$，使

$$\|f(x)\|\leqslant K_1+K_2\|x\|,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^{p+q-1};\tag{6}$$

A5) 存在常数 $M_1,M_2>0$，使

$$M_1\leqslant|g(x)|\leqslant M_2,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^{p+q-1}.$$

其中，A1)～A3) 对应于[2]中的假定(A.1)～(A.3)，而 A4)～A5) 是对非线性所作的要求.

注 1 模型(1)是一种仿射非线性模型，这种模型是目前研究非线性系统常用的一种模型结构[3].

注 2 假设 A4)和 A5)说明系统(1)满足线性增长条件.这种假设首先包括了线性情形，如 ARMA 模型；其次包括了死区、后冲、滞后及分段线性等实际应用中常见的输入非线性情形[5].

当参数 b,θ 已知时，显然取 $u_t=\dfrac{y_{t+1}^*-\theta^{\mathrm{T}}f(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}{b\cdot g(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}$ 便可.由于目前 b,θ 未知，我们采用典型的递推 LS 算法来对 b 及 θ 作出估计.

首先，将(1)改写成如下形式：

$$y_{t+1}=\bar{\theta}^{\mathrm{T}}\bar{\phi}_t+w_{t+1}.\tag{7}$$

其中

$$\bar{\theta}\triangleq[b\quad \theta^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\quad \bar{\phi}_t\triangleq[g_tu_t\quad f_t]^{\mathrm{T}}.\tag{8}$$

$\bar{\theta}$ 的递推估计如下：

$$\bar{\theta}_{t+1}=\bar{\theta}_t+a_tP_t\bar{\phi}_t(y_{t+1}-\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\bar{\theta}_t),\tag{9}$$

$$P_{t+1}=P_t-a_tP_t\bar{\phi}_t\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}P_t,\tag{10}$$

$$a_t=(1+\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}P_t\bar{\phi}_t)^{-1}.\tag{11}$$

其中，算法初值 θ_0 及 $P_0>0$ 可以任意选取.

根据"必然等价原则"，取适应控制为

$$u_t=\frac{y_{t+1}^*-\bar{\theta}_{t1}^{\mathrm{T}}f(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}{\bar{b}_t\cdot g(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}.\tag{12}$$

其中 $\bar{b}_t,\bar{\theta}_{t1}$ 为 $\bar{\theta}_t$ 的分量，即 $\bar{\theta}_t=[\bar{b}_t\quad \bar{\theta}_{t1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

由于集合 $\{\bar{b}_t=0\}$ 的概率可能是正的，因而 u_t 可能有时无法定义，为克服此困难，对 $\bar{\theta}_t$ 作适当的修正如下：

$$\hat{\theta}_t=\bar{\theta}_t+P_t^{\frac{1}{2}}e_{i_t}.\tag{13}$$

其中 $\bar{\theta}_t,P_t$ 分别由(9)及(10)定义，而 $\{i_t\}$ 是取值于 $\{0,1,\cdots,d+1\}$ 的整数序列，其定义如下：

$$i_t=\operatorname*{argmax}_{0\leqslant i\leqslant d+1}|b_t+e_1^{\mathrm{T}}P_t^{\frac{1}{2}}e_i|.\tag{14}$$

其中 $e_0=0,e_i(1\leqslant i\leqslant d+1)$ 是 $(d+1)\times(d+1)$ 单位方阵的第 i 列.

参数修正后的适应控制取为：

$$u_t=\frac{y_{t+1}^*-\hat{\theta}_{t1}^{\mathrm{T}}f(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}{\hat{b}_t\cdot g(y_t\cdots y_{t-p+1},u_{t-1}\cdots u_{t-q+1})}.\tag{15}$$

其中 $\hat{b}_t,\hat{\theta}_{t1}$ 为 $\hat{\theta}_t$ 的分量，即 $\hat{\theta}_t=[\hat{b}_t\quad \hat{\theta}_{t1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$.

通常我们期望如下定义的 t 步“闭环跟踪误差”的积累

$$R_t \triangleq \sum_{i=1}^{t}(y_i-y_i^*-w_i)^2 \tag{16}$$

满足

$$R_t=o(t)\quad \text{a.s.} \tag{17}$$

这是最优性的一个充要条件.那么自然要问，由(15)式定义的 STR 是否满足(17)？进一步，R_t 的收敛速度又是多少？在下一节，我们将给出这些问题的解答.

3 主要结果

本节针对上一节最后的问题给出本文的主要结果.

首先，引进下面一些记号：

$$\delta_t \triangleq \mathrm{tr}(P_t-P_{t+1}),\quad \alpha_t \triangleq \frac{(\overline{\phi}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{\theta}_t)^2}{1+\overline{\phi}_t^{\mathrm{T}}P_t\overline{\phi}_t},\quad \widetilde{\theta}_t \triangleq \overline{\theta}-\hat{\theta}_t, \tag{18}$$

$$\overline{r}_t \triangleq 1+\sum_{i=1}^{t}\|\overline{\phi}_i\|^2,\quad r_t \triangleq 1+\sum_{i=1}^{t}\|\phi_i\|^2. \tag{19}$$

进一步，设 $\{d_t\}$ 是非降的正确定性序列，使得

$$w_t^2=O(d_t)\quad \text{a.s.},\quad d_{t+1}=O(d_t). \tag{20}$$

文献[1]说明了在条件 A1)下，d_t 可取为

$$d_t=t^{\delta},\quad \forall\, \delta\in\left(\frac{2}{\beta},1\right). \tag{21}$$

其中 β 由(5)式给出.

下面的定理给出了闭环跟踪误差的收敛速度.

定理 1　对系统(1)，设条件 A1)～A5)满足，若 STR 按(15)所定义，则闭环控制系统是稳定的、最优的，且

$$R_t=O(\log t+\varepsilon_t)\quad \text{a.s.}$$

满足

$$\varepsilon_t=(\log t)\max_{1\leqslant i\leqslant t}\{\delta_i i^{\varepsilon}d_i\},\quad \forall\,\varepsilon>0,$$

其中 R_t，δ_t，d_t 分别在(16)，(18) 及(20) 中定义.

注 3　定理 1 得到的跟踪误差的收敛速度与[2] 线性情形时的结果是一样的.如果噪声 $\{w_t\}$ 是有界的或具有正态分布，则从定理 1 知

$$R_t=O(t^{\varepsilon})\quad \text{a.s.}\quad \forall\,\varepsilon>0,$$

显然，此结果要比最优性要求(17)深刻得多.

定理 1 的证明需要下面的两个引理.

引理 1　在定理 1 的条件下，存在正随机序列 $\{L_t\}$ 使

$$y_t^2\leqslant L_t\quad \text{a.s.},\quad \forall\, t$$

且 $\{L_t\}$ 满足关系式

$$L_{t+1}\leqslant(\lambda+c\zeta_t)L_t+\xi_t.$$

其中，常数 $\lambda\in(0,1)$，$c>0$ 而 $\zeta_t=(\alpha_t\delta_t\log r_t)^2+\alpha_t\delta_t$，$\xi_t=O(d_t\log^4 r_t)$.

引理 2　在引理 1 的条件下，有

$$\|\phi_t\|^2=O(r_t^{\varepsilon}d_t)\quad \text{a.s.},\quad \forall\,\varepsilon>0,$$

其中 r_t 与 d_t 分别在(19) 及(20) 中定义.

引理 1 及引理 2 的证明需要对 $\hat{\theta}_t$ 有下面的几个要求:

H1) $$\|\hat{\theta}_t\|^2 = O(\log r_{t-1}) \quad \text{a.s.};$$

H2) $$\sum_{i=1}^{t}\frac{(\bar{\phi}_i^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_i)^2}{1+\bar{\phi}_i^{\mathrm{T}}P_i\bar{\phi}_i} = O(\log r_t) \quad \text{a.s.};$$

H3) $$\liminf_{t\to\infty}\sqrt{\log r_{t-1}}\,|\hat{b}_t| \neq 0 \quad \text{a.s.}.$$

其中 $\tilde{\theta}_t, r_t$ 分别在(18),(19)中定义.

文献[2]已证明了对线性系统情形,在 A1)~A3)下,上面三个要求满足;由于在那里不对回归向量的形式作任何要求,并注意到本文对非线性所作的假定 A4)~A5)(使得 $\bar{r}_t = O(r_t)$),所以 H1)~H3)在这里也满足.

引理 1 的证明 将(15)代入(1)得

$$y_{t+1} = \bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_t + y_{t+1}^* + w_{t+1}, \tag{22}$$

于是根据条件 A3),由(18)及(20)可知

$$\begin{aligned} y_{t+1}^2 &\leqslant 2(\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_2)^2 + O(d_t) \leqslant 2\alpha_t\{1+\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}P_{t+1}\bar{\phi}_t + \bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}(P_t - P_{t+1})\bar{\phi}_t\} + O(d_t) \\ &\leqslant 2\alpha_t\{2+\delta_t\|\bar{\phi}_t\|^2\} + O(d_t) = 2\alpha_t\delta_t\|\bar{\phi}_t\|^2 + O(d_t + \log r_t). \end{aligned} \tag{23}$$

最后一个不等号是根据 $\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}P_{t+1}\bar{\phi}_t \leqslant 1$ 及 $\alpha_t = O(\log r_t)$ (见 H2)).

由非线性最小相位条件 A2)不难看出:

$$\|\phi_t\|^2 - u_t^2 = \sum_{i=0}^{p-1}y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q-1}u_{t-i}^2 = O\Big(\sum_{i=0}^{t}\lambda^{t-i}y_i^2\Big) + O(d_t) = O(L_t) + O(d_t). \tag{24}$$

其中 d_t 在(20) 式中定义,而 $L_t \triangleq \sum_{i=0}^{t-1}\lambda^{t-i}y_i^2$.

在条件 A3)~A5)下,结合(24)式可知由 STR(15)所定义的输入序列满足增长速度

$$u_t^2 = O\Big(\log^2 r_{t-1}\Big[\sum_{i=0}^{p-1}y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q-1}u_{t-i}^2\Big] + \log r_{t-1}\Big) = O\big(\log^2 r_{t-1}(L_t + d_t)\big). \tag{25}$$

其中用到了 $\|\hat{\theta}_t\|^2 = O(\log r_{t-1})$ 及 $|\hat{b}_t|^{-1} = O(\sqrt{\log r_{t-1}})$ (见 H1)及 H3)).

于是由(24),(25)得

$$\|\phi_t\|^2 = \sum_{i=1}^{p}y_{t-i+1}^2 + \sum_{i=1}^{q}u_{t-i+1}^2 = O((\log^2 r_{t-1})L_t) + O(d_t\log^2 r_t). \tag{26}$$

注意到 $bu_tg_t = \bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_t + y_{t+1}^* - \theta^{\mathrm{T}}f_t$,从而,类似于(23)式的推导,由(24),(26)及条件 A3)~A5)知

$$\begin{aligned} u_t^2 &\leqslant \frac{1}{b^2g_t^2}[3(\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_t)^2 + O(1+(\theta^{\mathrm{T}}f_t)^2] = O((\bar{\phi}_t^{\mathrm{T}}\tilde{\theta}_t)^2) + O(1+[\|\phi_t\|^2 - u_t^2]) \\ &= O(\alpha_t\delta_t\|\bar{\phi}_t\|^2) + O(L_t + d_t + \log r_t) = O(\alpha_t\delta_t\log^2 r_{t-1}L_t) + O(L_t + d_t\log^3 r_t). \end{aligned}$$

将上式代入(24)可得

$$\|\phi_t\|^2 = O(\alpha_t\delta_t\log^2 r_{t-1}L_t) + O(L_t + d_t\log^3 r_t). \tag{27}$$

注意到条件 A4)~A5) 使得 $\|\bar{\phi}_t\|^2 = O(\|\phi_t\|^2)$,由此结合(23) 及(27) 知存在常数 $c>0$,使

$$y_{t+1}^2 \leqslant c\zeta_tL_t + \xi_t.$$

其中 ζ_t, ξ_t 如引理叙述中所定义. 最后根据 L_t 的定义便得引理结论.　　证毕.

结合引理 1 的证明, 引理 2 及定理 1 的证明可参考[2].

4 结束语

本文给出了能被线性控制的非线性随机系统的自适应控制的最优性和稳定性结果. 本质上讲, 这类非线性系统在理论分析上基于线性系统已有的结果和方法[1,2]. 但在这里, 我们首次对随机情形下、较广的一类非线性系统给出了严格的理论结果. 最后, 对于一般的具有非线性增长的随机系统来讲, 类似的结论是否成立, 还有待于进一步研究. 初步的探索可见[6].

致谢　本文是在导师郭雷研究员的悉心指导下完成的, 作者在此深表感谢!

参　考　文　献

1 Guo, L. and Chen, H. F.. The Aström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(7): 802－812

2 Guo, L.. Convergence and logarithm laws of self-tuning regulators. Automatica, 1995, 31(3): 435－450

3 Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. and Morse, A. S.. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36(11): 1241－1253

4 Kanellakopoulos, I.. A discrete-time adaptive nonlinear system. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(11): 2362－2365

5 Tao, G. and Kokotovic, P. V.. Discrete-time adaptive control of systems with unknown nonsmooth input nonlinearities. Proc. of the 33nd IEEE Conf. of Decision and Control, 1994, 1171－1176

6 郭雷, 魏晨. 基于 LS 算法的离散时间非线性系统自适应控制——可行性及局限性. 中国科学, 1996, 26(4): 289－299

Adaptive Control for a Class of Nonlinear Stochastic Systems

WEI Chen

(Institute of Systems Science, Academia Sinica • Beijing, 100080, PRC)

Abstract: This paper is based on [1,2]. It analyses the adaptive control problem for a class of nonlinear stochastic systems, and gives some results on stability and convergence rate. Here, no structure condition is needed except for the requirement that the nonlinear function has linear growth rate.

Key words: adaptive control; least squares; nonlinear stochastic system; stability

本文作者简介

魏　晨　1970 年生. 1991 年毕业于山东大学数学系, 1994 年于中国科学院系统科学研究所获硕士学位. 现在中国科学院系统科学研究所攻读博士学位, 研究方向为非线性系统的自适应控制与辨识.