第 14 卷第 6 期
1997 年 12 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 14, No. 6
Dec., 1997

开环稳定的 H_∞ 控制器设计方法*

翁正新　施颂椒　张钟俊　　王广雄
(上海交通大学自动化系・上海，200030)　(哈尔滨工业大学控制工程系・哈尔滨，150001)

摘要：本文对开环稳定的 H_∞ 控制器设计问题进行了研究. 在考虑最坏干扰的情况下，导出了基于观测器的、开环稳定的 H_∞ 状态反馈控制器设计方法.

关键词：H_∞ 控制；H_∞ 状态反馈；强稳定

1 引　言

理论研究和实际设计表明常规的 H_∞ 设计方法(如"DGKF"方法[1])和基于观测器的 H_∞ 状态反馈设计方法[2~4]可能会导致不稳定的控制器设计，而从事实际工作的控制工程师总是不愿意使用不稳定的控制器，尤其是当控制对象本身是稳定的. 这种在满足系统闭环稳定的同时还要求控制器自身稳定的问题被称为强稳(strongly stable)问题. 如果一系统 G 能被稳定的控制器 K 所镇定，则称系统 G 是强可镇定的，或称控制器 K 强镇定系统 G. 本文在文献[5,6]的启发下，对开环稳定的 H_∞ 控制器设计问题进行了深入研究，并在考虑最坏干扰的情况下，导出了基于观测器的、开环稳定的 H_∞ 状态反馈控制器设计方法.

2 问题描述

设线性定常系统如图 1 所示，这就是所谓的标准 H_∞ 控制问题框图. 图中的信号皆为向量，$w \in \mathbb{R}^{m_1}$ 表示外输入信号，包括干扰、噪声、参考输入等；$u \in \mathbb{R}^{m_2}$ 表示控制信号；$z \in \mathbb{R}^{p_1}$ 表示被控外输出信号，包括误差、被控对象输出、控制器输出等；$y \in \mathbb{R}^{p_2}$ 表示被测量信号，$P(s)$ 表示广义被控对象，包括实际被控对象和加权函数. $K(s)$ 表示所要设计的控制器.

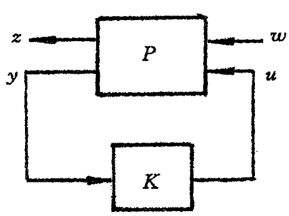

图 1　H_∞ 控制标准问题框图

广义对象 $P(s)$ 的状态方程描述为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u, \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u. \end{cases} \tag{1}$$

假设系统(1)满足：

1) 系统是强可镇定的，即存在稳定的镇定控制器 $K(s)$.

2) (A, B_2, C_2) 可稳、可检测.

3) D_{12} 列满秩，D_{21} 行满秩，$D_{11} = 0$，$D_{22} = 0$.

本文考虑这样一个 H_∞ 优化设计问题：对于系统(1)，寻找一个稳定的镇定控制器 $K(s)$，使得 w 到 z 的闭环传递函数 T_{zw} 满足 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$，其中 $\gamma \in \mathbb{R}$ 为给定常数.

3 直接全状态反馈控制

假设系统(1)的状态可全部获得，则可采用全状态反馈控制律

* 中国博士后科学基金资助项目.
本文于 1995 年 8 月 2 日收到，1997 年 1 月 3 日收到修改稿.

$$u = K_c x. \tag{2}$$

此时，相应的闭环系统为

$$\begin{cases}\dot{x} = (A + B_2K_c)x + B_1w,\\ z = (C_1 + D_{12}K_c)x.\end{cases} \tag{3}$$

问题是求取状态反馈增益 K_c，使得 $A + B_2K_c$ 是稳定的，且 w 到 z 的闭环传递函数 $T_{zw} = (C_1 + D_{12}K_c)(sI - A - B_2K_c)^{-1}B_1$，满足 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$，$\gamma \in \mathbb{R}$ 为给定常数. 下述定理给出了这一问题的解.

定理 1　给定标量 $\gamma > 0$，则存在状态反馈增益 K_c，使得 $A + B_2K_c$ 为稳定的，且 w 到 z 的闭环传递函数 T_{zw} 满足 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 的充分必要条件是存在正定对称阵 $Q_c > 0$，使得代数 Riccati 方程(4) 有正定对称解 $X > 0$.

$$A^{\mathrm{T}}X + XA + \gamma^{-2}XB_1B_1^{\mathrm{T}}X + C_1^{\mathrm{T}}C_1 - (XB_2 + C_1^{\mathrm{T}}D_{12})(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1) + Q_c = 0. \tag{4}$$

而且当上述条件满足时，状态反馈增益 K_c 为

$$K_c = -(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1). \tag{5}$$

证　见附录 A.

需指出，若系统(1)满足 $D_{12}^{\mathrm{T}}[C_1\quad D_{12}] = [0\quad I]$，且取 $Q_c = 0$，则 Riccati 方程(4) 与文献[1] 的全信息控制 Riccati 方程相同，且状态反馈增益(5) 与全信息中心控制器相同，即 $K_c = F_\infty$. 但值得注意的是 Riccati 方程(4) 中的正定对称阵 Q_c 在本文中将起到很重要的作用.

4　基于全阶观测器的稳定控制器设计

当系统(1) 的状态不可获得时，就要寻找基于观测器的控制器来镇定系统(1)，且使 w 到 z 的闭环传递函数满足 H_∞ 范数界 γ. 假设对于给定的标量 $\gamma > 0$，存在正定对称阵 $Q_c > 0$ 使得代数 Riccati 方程(4) 存在正定对称解 $X > 0$，则由定理 1 可知，状态反馈增益(5) 能保证闭环系统(3) 是稳定的，且 w 到 z 的闭环传递函数满足 H_∞ 范数界 γ. 现在来构造状态观测器. 在通常情况下，人们在构造观测器时是不考虑干扰影响的，但由文[1]的分析可知，“DGKF”方法所得到的中心控制器可以看作是在最坏干扰作用下，全信息控制器的输出估计器. 因此本文在构造观测器时，也考虑干扰的影响. 由于实际干扰是未知的. 故考虑最坏干扰[1]

$$w = \gamma^{-2}B_1^{\mathrm{T}}Xx, \tag{6}$$

则基于全阶观测器的控制器为

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}} = (A + B_2K_c - K_oC_2 + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X)\hat{x} + K_oy,\\ u = K_c\hat{x}.\end{cases} \tag{7}$$

式中 $\hat{x}$ 为状态 x 的估计值；K_c 为状态反馈增益，由(5) 式给出；K_o 为待定的观测器增益. 由系统(1)和控制器(7)所构成的闭环系统为：

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{pmatrix} &= \begin{bmatrix}A + B_2K_c & B_2K_c\\ \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X & A - K_oC_2 + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix}\\ &\quad + \begin{bmatrix}B_1\\ K_oD_{21} - B_1\end{bmatrix}w\\ &\triangleq A_ex_e + B_ew,\end{aligned} \tag{8}$$

$$z = [C_1 + D_{12}K_c\quad D_{12}K_c]\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix} \triangleq C_ex_e.$$

其中 $e = \hat{x} - x$ 为状态估计误差.

设计目标为寻找观测器增益K_o,使得A_e是稳定的,且(8)式中w到z的闭环传递函数满足H_∞范数界γ.同时还要保证控制器(7)是开环稳定的.

据引理A,为了保证A_e是稳定阵,且w到z的闭环传递函数$T_{zw}=C_e(sI-A_e)^{-1}B_e$满足$H_\infty$范数界$\gamma$,应该存在一正定对称阵$X_e>0$,满足

$$A_e^TX_e+X_eA_e+\gamma^{-2}X_eB_eB_e^TX_e+C_e^TC_e<0. \tag{9}$$

显然,若对于某给定对称阵$P_e\geqslant 0$,存在正定对称阵$X_e>0$满足

$$A_e^TX_e+X_eA_e+\gamma^{-2}X_eB_eB_e^TX_e+C_e^TC_e+P_e<0, \tag{10}$$

则该$X_e>0$一定满足(9)式.

选取

$$P_e=X_e\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^T\end{bmatrix}X_e,$$

并假设

$$X_e=\begin{bmatrix}X & 0\\ 0 & Y\end{bmatrix},$$

其中$X>0$满足Riccati方程(4),且取状态反馈增益K_c为(5)式.

令

$$\begin{bmatrix}U_{11} & U_{12}\\ U_{12}^T & U_{22}\end{bmatrix}=A_e^TX_e+X_eA_e+\gamma^{-2}X_eB_eB_e^TX_e+C_e^TC_e+P_e, \tag{11}$$

则有

$$\begin{aligned}U_{11}=&A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_1^TC_1+K_c^T(B_2^TX+D_{12}^TC_1)\\ &+(B_2^TX+D_{12}^TC_1)^TK_c+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c=-Q_c<0,\end{aligned} \tag{12}$$

$$U_{12}=(B_2^TX+D_{12}^TC_1)^TK_c+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c=0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}U_{22}=&(A^T-C_2^TK_o^T+\gamma^{-2}XB_1B_1^T-\gamma^{-2}XB_1D_{21}^TK_o^T)Y\\ &+Y(A-K_oC_2+\gamma^{-2}B_1B_1^TX-\gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^TX)\\ &+\gamma^{-2}Y(K_oD_{21}-B_1)(D_{21}^TK_o^T-B_1^T)Y+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c+YB_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TY \qquad (14a)\\ =&A^T(X+Y)+(X+Y)A+\gamma^{-2}(X+Y)B_1B_1^T(X+Y)+YB_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TY\\ &+C_1^TC_1+Q_c-[C_2^T+\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T]K_o^TY-YK_o[C_2+\gamma^{-2}D_{21}B_1^T(X+Y)]\\ &+\gamma^{-2}YK_oD_{21}D_{21}^TK_o^TY \qquad (14b)\\ =&[A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX]^T(X+Y)+(X+Y)[A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX]\\ &+(X+Y)B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^T(X+Y)+\gamma^{-2}(X+Y)B_1B_1^T(X+Y)\\ &+XB_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX+C_1^TC_1+Q_c+\{YK_o-[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T]\\ &\cdot(\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)^{-1}\}(\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)\{YK_o-[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)^{-1}\}^T\\ &-[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)^{-1}[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T]^T. \qquad (14c)\end{aligned}$$

如果取

$$YK_o=[C_2^T+\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)^{-1}, \tag{15}$$

且存在$Y>0$和$Q_0>Q_c>0$,满足

$$\begin{aligned}&[A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX]^T(X+Y)+(X+Y)[A-B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX]\\ &+(X+Y)B_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^T(X+Y)+\gamma^{-2}(X+Y)B_1B_1^T(X+Y)\\ &-[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^T)^{-1}[\gamma^{-2}(X+Y)B_1D_{21}^T+C_2^T]^T\\ &+XB_2(D_{12}^TD_{12})^{-1}B_2^TX+C_1^TC_1+Q_o=0,\end{aligned} \tag{16}$$

则有

$$U_{22} = Q_c - Q_o < 0. \tag{17}$$

所以有(10)式成立，亦即(9)式成立.

令 $W = X + Y > X > 0$，则 Riccati 方程(16)可表示成

$$\begin{aligned}&[A - B_2(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X]^{\mathrm{T}}W + W[A - B_2(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X] + WB_2(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_2^{\mathrm{T}}W \\ &+ \gamma^{-2}WB_1B_1^{\mathrm{T}}W - [\gamma^{-2}WB_1D_{21}^{\mathrm{T}} + C_2^{\mathrm{T}}](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^{\mathrm{T}})^{-1}[\gamma^{-2}WB_1D_{21}^{\mathrm{T}} + C_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\ &+ XB_2(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_2^{\mathrm{T}}X + C_1^{\mathrm{T}}C_1 + Q_o = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

满足(15)式的观测器增益 K_o 为

$$K_o = (W - X)^{-1}[C_2^{\mathrm{T}} + \gamma^{-2}WB_1D_{21}^{\mathrm{T}}](\gamma^{-2}D_{21}D_{21}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{19}$$

下面来考察上述观测器控制器的开环稳定性. 假设对于给定的 $\gamma > 0$，存在 $W > X > 0$ 和 $Q_o > Q_c$ 满足 Riccati 方程(18)，则由上述分析可知，正定对称阵 $Y = W - X$ 满足 $U_{22} < 0$. 由(14a)式可得

$$\begin{aligned}&(A - K_oC_2 + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X + B_2K_c)^{\mathrm{T}}Y + Y(A - K_oC_2 + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X \\ &\quad - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X + B_2K_c) \\ &< K_c^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}Y + YB_2K_c - \gamma^{-2}Y(K_oD_{21} - B_1)(K_oD_{21} - B_1)^{\mathrm{T}}Y - K_c^{\mathrm{T}}D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12}K_c \\ &\quad - YB_2(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_2^{\mathrm{T}}Y \\ &= - \gamma^{-2}Y(K_oD_{21} - B_1)(K_oD_{21} - B_1)^{\mathrm{T}}Y - [B_2^{\mathrm{T}}(X + Y) + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1]^{\mathrm{T}}(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1} \\ &\quad \cdot [B_2^{\mathrm{T}}(X + Y) + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1].\end{aligned} \tag{20}$$

由引理 A 可知 $A - K_oC_2 + \gamma^{-2}B_1B_1^{\mathrm{T}}X - \gamma^{-2}K_oD_{21}B_1^{\mathrm{T}}X + B_2K_c$ 为稳定阵，所以控制器(7)是开环稳定的.

根据上面的分析，我们有下述定理

定理 2　给定标量 $\gamma > 0$，假设存在正定对称阵 $X > 0$ 和 $Q_c > 0$ 满足 Riccati 方程(4)，且存在正定对称阵 $W > X$ 和 $Q_o > Q_c$ 满足 Riccati 方程(18)，如果取状态反馈增益 K_c 满足式(5)，观测器增益 K_o 满足(19)式，则基于全阶观测器的控制器(7)强镇定系统(1)，且 w 到 z 的闭环传递函数满足 H_∞ 范数界 γ.

5　基于降阶观测器的稳定控制器设计

上面讨论了基于全阶观测器的稳定控制器设计方法. 如果系统(1)的状态有一部分是可以获得的，则可以采用降阶观测器结构. 首先假设系统(1)满足：

1) 系统是强可镇定的.

2) (A, B_2, C_2) 可稳、可检测.

3) D_{12} 列满秩，$D_{11} = 0, D_{21} = 0, D_{22} = 0$.

4) C_2 行满秩且其列数大于行数.

5) B_{11} 行满秩，$B_{21} = 0$(B_{11} 和 B_{21} 见(22)式).

选择矩阵 $C_2^{\#}$，使得

$$T \triangleq \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2^{\#} \end{bmatrix},$$

是可逆矩阵，且记 $T^{-1} \triangleq [T_1 \quad T_2]$. 令 $x = T^{-1}\bar{x} = [T_1 \quad T_2]\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$，则系统(1)可以变换为

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\bar{x}}_1\\ \dot{\bar{x}}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{12}\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}B_{21}\\ B_{22}\end{bmatrix}u,\\ z=[C_{11}\quad C_{12}]\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}+D_{12}u,\\ y=\bar{x}_1.\end{cases}\tag{21}$$

式中

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\triangleq TAT^{-1},\quad \begin{bmatrix}B_{11}\\ B_{12}\end{bmatrix}\triangleq TB_1,\quad \begin{bmatrix}B_{21}\\ B_{22}\end{bmatrix}\triangleq TB_2,\quad [C_{11}\quad C_{12}]\triangleq C_1T^{-1}.\tag{22}$$

与全阶观测器设计相类似，在设计降阶观测器时，也考虑最坏干扰 $w=\gamma^{-2}B_1^{\mathrm{T}}Xx$ 的影响，这里 X 仍为 Riccati 方程(4)的解. 在最坏干扰作用下，基于降阶观测器的控制器为

$$\begin{cases}\dot{g}=\bar{F}g+\bar{G}y+\bar{H}u,\\ \hat{\bar{x}}_2=g+K_oy,\\ \hat{x}=T_1\bar{x}_1+T_2\hat{\bar{x}}_2,\\ u=K_c\hat{x}.\end{cases}\tag{23}$$

式中 g 为观测器状态，$\hat{\bar{x}}_2$ 和 $\hat{x}$ 分别为 $\bar{x}_2$ 和 x 的估计值，K_c 为状态反馈增益，仍由(5)式给出，K_o 为观测器增益.

$$\begin{cases}\bar{F}=A_{22}-K_oA_{12}+\gamma^{-2}(B_{12}-K_oB_{11})B_1^{\mathrm{T}}XT_2,\\ \bar{G}=\bar{F}K_o+A_{21}-K_oA_{11}+\gamma^{-2}(B_{12}-K_oB_{11})B_1^{\mathrm{T}}XT_1,\\ \bar{H}=B_{22}-K_oB_{21}.\end{cases}\tag{24}$$

系统(1)和控制器(23)所构成的闭环系统为:

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{e}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A+B_2K_c & B_2K_cT_2\\ \gamma^{-2}(B_{12}-K_oB_{11})B_1^{\mathrm{T}}X & \bar{F}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ K_oB_{11}-B_{12}\end{bmatrix}w\triangleq A_ex_e+B_ew,\\ z=[C_1+D_{12}K_c\quad D_{12}K_cT_2]\begin{pmatrix}x\\ e\end{pmatrix}\triangleq C_ex_e.\end{cases}\tag{25}$$

式中 $e=\hat{\bar{x}}_2-\bar{x}_2$.

设计目的是寻找降阶观测器增益 K_o 使得 A_e 为稳定阵且(25)式中 w 到 z 的闭环传递函数满足 H_∞ 范数界 γ，同时还必须保证基于降阶观测器的控制器(23)是开环稳定的. 采用同样的分析方法，可得下述结论：

定义 Riccati 方程

$$\begin{aligned}&[A_{22}+\gamma^{-2}B_{12}B_1^{\mathrm{T}}XT_2]^{\mathrm{T}}Y+Y[A_{22}+\gamma^{-2}B_{12}B_1^{\mathrm{T}}XT_2]+\gamma^{-2}YB_{12}B_{12}^{\mathrm{T}}Y+YB_{22}(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}B_{22}^{\mathrm{T}}Y\\ &-(A_{12}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}YB_{12}B_{11}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}T_2^{\mathrm{T}}XB_1B_{11}^{\mathrm{T}})(\gamma^{-2}B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}(A_{12}+\gamma^{-2}B_{11}B_{12}^{\mathrm{T}}Y+\gamma^{-2}B_{11}B_1^{\mathrm{T}}XT_2)\\ &+T_2^{\mathrm{T}}(B_2^{\mathrm{T}}X+D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)^{\mathrm{T}}(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X+D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)T_2+Q_o=0.\end{aligned}\tag{26}$$

定理 3　给定标量 $\gamma>0$，假设存在正定对称阵 $X>0$ 和 $Q_c>0$ 满足 Riccati 方程(4)，且存在正定对称阵 $Y>0$ 和 $Q_o>0$，满足 Riccati 方程(26). 如果取状态反馈增益 K_c 满足(5)式，观测器增益 K_o 满足

$$YK_o=(A_{12}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}YB_{12}B_{11}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}T_2^{\mathrm{T}}XB_1B_{11}^{\mathrm{T}})(\gamma^{-2}B_{11}B_{11}^{\mathrm{T}})^{-1},\tag{27}$$

则基于降阶观测器的控制器 (23) 强镇定系统 (1)，且 w 到 z 的闭环传递函数满足 H_∞范数界 γ.

6 结　论

本文在考虑最坏干扰的情况下，从控制器自身稳定的角度出发，利用分析的手段分别导出了基于全阶和降阶观测器的 H_∞ 状态估计反馈稳定控制器设计方法.

参 考 文 献

1 Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A.. State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control problems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, AC-34(8): 831－847

2 翁正新，王广雄. 混合灵敏度问题的鲁棒 H_∞/LTR 设计方法. 控制理论与应用，1995，12(3)：284－289

3 翁正新，王广雄，姚一新. 基于降阶观测器的鲁棒 H_∞ 优化控制律. 哈尔滨工业大学学报，1994，26(5)：57－62

4 Weng Zhengxin and Wang Guangxiong. Robust H_∞/LTR state-feedback synthesis method. Journal of Harbin Institute of Technology, 1994, E-1(2): 30－33

5 Medanic, J. V., Perkins, W. R. and Veillette, R. J.. On the design of reliable control systems. Proc. of American Control conference, 1990, 3030－3035

6 Veillette, R. J., Medanic, J. V. and Perkins, W. R.. Robust stabilization and disturbance rejection for systems with structured uncertainty. Proc. of the 28th Conf. on Deci. and Contr., Tampa, Florida, 1989, 936－941

7 Zhou, K. and Khargonekar, P. P.. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. System and Control Letters, 1988, 11(2): 85－91

附录 A　定理 1 的证明

定理 1 的证明需要用到下述引理：

引理 A[7]　假设 A,B,C,D 是具有适当维数的矩阵，则下述命题等价

1) A 为稳定矩阵且 $\|C(sI-A)^{-1}B+D\|_\infty<\gamma$.

2) $\gamma^2I-D^TD>0$ 且存在正定对称矩阵 $X>0$，使得下式成立

$$A^TX+XA+(XB+C^TD)(\gamma^2I-D^TD)^{-1}(B^TX+D^TC)+C^TC<0.$$

定理 1 证明　充分性. 假设存在正定对称矩阵 $Q_c>0$，使得代数 Riccati 方程(4)有正定对称解 $X>0$. 且选择状态反馈增益 K_c 为(5)式，则有

$$\begin{aligned}&(A+B_2K_c)^TX+X(A+B_2K_c)+(C_1+D_{12}K_c)^T(C_1+D_{12}K_c)\\&=A^TX+XA+K_c^TB_2^TX+XB_2K_c+C_1^TC_1+C_1^TD_{12}K_c+K_c^TD_{12}^TC_1+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c\\&=A^TX+XA+C_1^TC_1+K_c^T(B_c^TX+D_{12}^TC_1)+(XB_2+C_1^TD_{12})K_c+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c\\&=A^TX+XA+C_1^TC_1-(XB_2+C_1^TD_{12})(D_{12}^TD_{12})^{-1}(B_2^TX+D_{12}^TC_1),\end{aligned}\tag{A1}$$

则

$$\begin{aligned}&(A+B_2K_c)^TX+X(A+B_2K_c)+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+(C_1+D_{12}K_c)^T(C_1+D_{12}K_c)\\&=A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX-(XB_2+C_1^TD_{12})(D_{12}^TD_{12})^{-1}(B_2^TX+D_{12}^TC_1)+C_1^TC_1.\end{aligned}\tag{A2}$$

由方程(4)可知

$$(A+B_2K_c)^TX+X(A+B_2K_c)+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+(C_1+D_{12}K_c)^T(C_1+D_{12}K_c)=-Q_c<0.\tag{A3}$$

由引理 A 可知，系统(3)是稳定的，且 w 到 z 的闭环传递函数 T_{zw} 满足 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$.

必要性. 假设存在状态反馈增益 K_c，使得系统(3)是稳定的，且 w 到 z 的闭环传递函数 T_{zw} 满足 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$，则由引理 A 可知，必存在正定对称阵 $X>0$，使得下式成立

$$(A+B_2K_c)^TX+X(A+B_2K_c)+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+(C_1+D_{12}K_c)^T(C_1+D_{12}K_c)<0.\tag{A4}$$

令上式左端为 Q，则

$$\begin{aligned}Q&=A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_1^TC_1+K_c^T(B_2^TX+D_{12}^TC_1)+(XB_2+C_1^TD_{12})K_c+K_c^TD_{12}^TD_{12}K_c\\&=A^TX+XA+\gamma^{-2}XB_1B_1^TX+C_1^TC_1+[K_c^T+(XB_2+C_1^TD_{12})(D_{12}^TD_{12})^{-1}](D_{12}^TD_{12})\end{aligned}$$

$$\cdot [K_c + (D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1)] - (XB_2 + C_1^{\mathrm{T}}D_{12})(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1). \tag{A5}$$

取

$$K_c = -(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1), \tag{A6}$$

则有

$$Q = A^{\mathrm{T}}X + XA + \gamma^{-2}XB_1B_1^{\mathrm{T}}X + C_1^{\mathrm{T}}C_1 - (XB_2 + C_1^{\mathrm{T}}D_{12})(D_{12}^{\mathrm{T}}D_{12})^{-1}(B_2^{\mathrm{T}}X + D_{12}^{\mathrm{T}}C_1) < 0. \tag{A7}$$

选择 $Q_c = -Q > 0$，则可得 Riccati 方程(4).

Open-Loop Stable H_∞ Controller Design Method

WENG Zhengxin, SHI Songjiao and $\boxed{\text{ZHANG Zhongjun}}$

(Automation Department, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

WANG Guangxiong

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: The design of the open-loop stable H_∞ controller is studied in this paper, and in the presence of the worst-case disturbance, an open-loop stable H_∞ state-feedback controller design method based on observer is developed.

Key words: H_∞ control; H_∞ state-feedback; strongly stable

本文作者简介

翁正新 1966年生. 1989年毕业于哈尔滨工业大学控制工程系自动控制专业，分别于1992年和1995年在哈尔滨工业大学控制理论及应用专业获硕士和博士学位. 1995年在上海交通大学作博士后研究. 现留校从事教学、科研工作. 主要研究兴趣为 H_∞ 控制，鲁棒控制和人工神经网络.

施颂椒 1933年生. 1956年毕业于上海交通大学电力工程系. 现为该校自动化系教授，博士生导师. 主要从事广义动态系统理论，控制系统计算机辅助设计，H_∞ 与鲁棒控制，结构奇异值 μ 方法，自适应控制等.

王广雄 1933年生. 1957年毕业于哈尔滨工业大学研究生班. 后一直在哈尔滨工业大学任教并从事科研工作，现为该校控制工程系教授，博士生导师. 目前主要研究方向是 H_∞ 控制理论及应用，μ 综合和 μ 分析，鲁棒控制等.