

# 经典控制理论在电磁轴承系统控制中的应用\*

汪希平 崔卫东 刘 令

(上海大学机械电子工程学院轴承研究室·上海, 200072)

**摘要:** 本文叙述了应用经典控制理论中的根轨迹校正方法对电磁轴承系统进行动态特性校正的设计过程. 电磁轴承系统存在的右端极点是系统本质不稳定的主要原因, 本文提出的图形校正方法不仅可以解决电磁轴承系统控制器的设计问题, 而且也是对经典控制理论中动态指标图形校正法的一个补充.

**关键词:** 电磁轴承系统; 校正环节; 根轨迹; 动态品质指标; 静态品质指标

## 1 引言

应用磁场力使物体无接触地悬浮的观点早在一百多年前就已提了出来, 由于控制技术和电子元件发展的限制而一直未能实现. 对电磁轴承的分析研究表明, 磁悬浮系统具有本质不稳定性, 而电磁轴承实际上是一个位置控制系统, 控制器是系统的重要环节之一, 其性能与系统的稳定性及各项技术指标有密切关系<sup>[1]</sup>. 选择什么样的控制器, 如何设置其中的有关参数, 才能使系统稳定地工作并达到预期的性能指标, 是研究电磁轴承系统必须解决的问题. 控制器包括调节电路、功率放大电路和位移传感器电路. 设计的主要内容是确定调节电路参数的选择范围, 以保证控制的稳定性. 针对系统的特征方程, 应用 Routh 判据或谢一聂判据<sup>[2~4]</sup>等代数方法即可. 这种方法的优点是得出的参数范围较直观. 但系统的阶数较高时, 要获得精确的解析解则并非易事. 一般文献中常见的校正例子都是在系统不含有右端极点的情况下进行的. 而电磁轴承系统的开环传递函数中则包含有一个系统的开环右极点, 这是系统具有本质不稳定性的关键所在. 本文介绍的是根据电磁铁和转子参数确定的系统开环极点位置, 采用经典控制理论中的根轨迹图法, 对系统进行动态品质指标校正的方法, 使系统控制器传递函数的设计问题得以迅速地解决. 应用此方法, 我们已成功地设计了一个用于激光器循环风机主轴支承的电磁轴承系统, 其转子直径 60mm, 重 6kg, 实验转速 35000rpm.

## 2 电磁轴承系统的线性化描述

精确地对五自由度电磁轴承系统进行数学描述是一项复杂而困难的工作. 不失一般性, 通常以单自由度系统的线性化模型作为分析对象, 即在转子的平衡点附近, 获得单自由度系统的线性化方程<sup>[1]</sup>

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = C_1x - C_2i_c + f_x. \quad (1)$$

式中,  $m$  是对应于一个轴承的转子质量;  $C_1$  和  $C_2$  分别为电磁轴承系统的位移刚度系数和电流刚度系数;  $x$  为转子在该自由度上的位移;  $i_c$  是对应于  $x$  的控制电流;  $f_x$  为作用于转子(该自由度方向对应于一个轴承)上的外干扰力.

上式的拉氏变换式为

$$ms^2X(s) = C_1X(s) - C_2I_c(s) + F_x(s). \quad (2)$$

式中  $X(s) = L[x(t)]$ ,  $I_c(s) = L[i_c(t)]$ ,  $F_x(s) = L[f_x(t)]$ .

\* 上海市科委和上海市教委科学技术发展基金联合资助项目.  
本文于 1996 年 1 月 8 日收到, 1996 年 10 月 3 日收到修改稿.

设调节电路的传递函数为  $G_c(s)$ , 则图 1 所示即为系统的闭环传递函数框图, 其闭环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{C_2 G_c(s)}{ms^2 - C_1 + C_2 G_c(s)}. \quad (3)$$

由图 1 可看出系统具有一个开环右极点, 因而是本质不稳定系统, 必须加以适当的控制环节后, 系统才能稳定工作. 根据稳定系统的必要条件可知, 其调节电路中应包含比例项和微分项, 即采用 PD 调节电路. 为了消除静态误差, 通常采用 PID 调节电路.

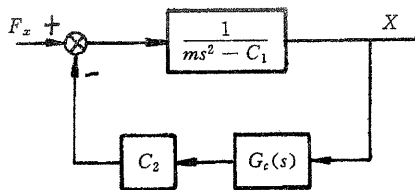


图 1 采用电流控制策略时的系统闭环传递函数框图

### 3 系统品质指标的描述

在设计一个控制系统前, 总是提出期望达到的品质指标作为设计的准则. 对于不同的品质指标, 采用的设计方法也往往不同. 品质指标可分为静态品质指标和动态品质指标<sup>[5~7]</sup>.

#### 3.1 静态品质指标

系统的静态品质指标是指在给定某一种输入信号时, 系统稳定时的输出量与输入量之间的相对精确度. 换句话说, 就是输出量对输入量的跟随能力. 静态品质指标可以用绝对量来表示, 更多的是用误差系数  $e$  表示. 如  $e_p$  表示系统的静态位置误差系数;  $e_v$  表示系统速度误差系数;  $e_a$  表示系统的静态加速度误差系数. 品质指标的提法与系统的类型有关.

#### 3.2 动态品质指标

动态品质指标分时域指标和频域指标, 这里只讨论时域指标及其在电磁轴承系统设计方面的应用. 时域指标可以分为两类:

- 1) 最大超调量  $\sigma_p$ , 调整时间  $t_s$ , 上升时间  $t_r$  等;
- 2) 闭环主导极点位置, 或用主导极点位置对应的阻尼比  $\zeta$  及无阻尼固有频率  $\omega_n$  来表示.

注  $\zeta$  在电路及自控专业中均称为阻尼系数, 由于这里讨论的是机电磁一体化系统, 因此称作阻尼比较为合适. 上述两类指标有以下近似关系:

$$\sigma_p = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right), \quad t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}. \quad (4)$$

时域指标所对应的设计方法有波德图和根轨迹两种方法, 本文只讨论根轨迹分析方法.

### 4 系统的开环极点及校正方法

由图 1 得系统的开环传递函数

$$G_{io}(s) = \frac{C_2 G_c(s)}{ms^2 - C_1}. \quad (5)$$

开环极点位置为图 2 中的  $P_1, P_2$ , 且

$$P_1 = -\sqrt{C_1/m}, \quad P_2 = \sqrt{C_1/m}. \quad (6)$$

当给定系统的时域动态品质指标, 有两种求解的方法: 一种是只考虑所设计的校正环节的增益系数最小的方法; 另一种是既考虑动态指标, 又考虑静态指标的 Ross-Warren 法.

#### 4.1 不考虑静态品质指标的校正设计步骤

设给定系统的动态品质指标为  $\sigma_p$  和  $t_s$ , 则由式(4)得:

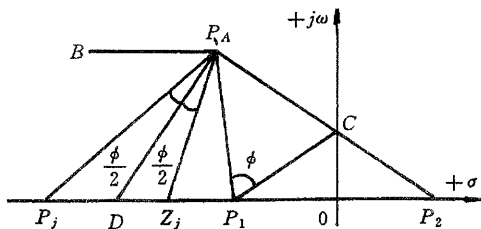


图 2 电磁轴承系统的开环极点及校正环节零极点位置的确定

$$\zeta = \frac{|\ln\sigma_p|}{\sqrt{\pi^2 + (\ln\sigma_p)^2}}, \quad \omega_n = \frac{3}{t_s \zeta}, \quad (7)$$

闭环主导极点的位置设定为

$$P_A = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}. \quad (8)$$

如图 2 中所示(注:图中未画出共轭极点  $P'_A = -\zeta\omega_n - j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ ).

从图中的几何关系,不难得出  $\angle P_A P_1 C$  即为补偿角  $\phi$ ,且  $\phi$  是极点  $P_1$  的滞后附加角.在  $P_A$  点作一水平线  $P_A B$ ,并取  $P_A D$  为  $\angle B P_A O$  的平分线,再以  $P_A D$  为基准线向两边各转动  $\frac{\phi}{2}$  后的延长线交于水平轴得  $P_j$  和  $Z_j$  两点.要使系统的闭环根轨迹通过  $P_A$  点,则补偿角  $\phi$  必须大于零,即超前补偿,所以右边的交点  $Z_j$  是校正环节零点的位置;而左边的交点  $P_j$  则是校正环节的极点位置.

#### 4.2 Ross-Warren 校正的步骤

在上述校正后,根据下式算出在  $A$  点处的根迹增益  $K_r(P_A)$ :

$$K_r(P_A) = \frac{|P_A + P_j| |P_A - P_1| |P_A + P_1|}{|P_A + Z_j|}, \quad (9)$$

$$\text{则系统的静态误差系数为} \quad e = K_r(P_A) \frac{Z_j}{P_j \cdot C_1/m}. \quad (10)$$

若  $e$  不满足给定的静态品质指标,则可应用 Ross-Warren 法.其过程如下:

设原系统的静态品质指标为  $e$ ,为保持校正后的静态品质指标不变,则应有

$$\frac{Z_j}{P_j} \cdot \frac{|P_A + P_j|}{|P_A + Z_j|} = \frac{e C_1}{|P_A + P_1| |P_A - P_1| m}, \quad (11)$$

$$\text{再由相角条件得出} \quad \text{ctg}\lambda = \text{ctg}\phi - \frac{e C_1}{|P_A + P_1| |P_A - P_1| m \sin\phi}. \quad (12)$$

这样,  $P_j$  和  $Z_j$  的坐标即可由图 3 中的几何关系求出.

#### 4.3 两种校正方法的比较

对比图 2 和图 3 可知,不考虑静态品质指标时的设计较考虑静态指标的 Ross-Warren 法容易,且后者还有一个限制条件,即

$$\lambda < \pi - \theta. \quad (13)$$

这个条件实际上限制了  $P_A$  可以选取的位置,或者说限制了系统的动态响应指标.这样,对于一个实际的电磁轴承系统,只要其结构参数给定,这个系统能够获得的最佳响应也就确定了.补偿角  $\phi$  是一个很重要的设计参数,其大小既影响所设计的控制环节的带宽,也会影响系统控制参数的选取范围.

#### 4.4 滞后补偿对静态品质指标的影响

滞后补偿的作用相当于积分环节,对系统的静态品质指标有改善作用,滞后补偿环节的传递函数写为

$$G_z(s) = A_i \frac{1 + sT_i}{1 + \alpha sT_i}. \quad (14)$$

式中  $T_i$  是补偿时间常数,  $\alpha$  为滞后系数,且  $\alpha > 1$ ,  $A_i$  是滞后校正环节的增益系数.为了不影响前面已设计过的动态指标,滞后环节零极点的设置应靠近  $S$  平面的原点,且相对于  $P_A$  点而言,

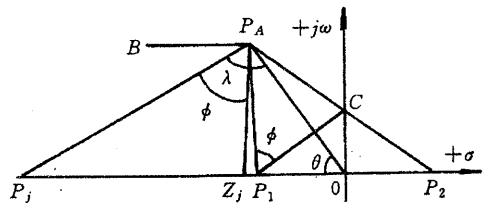


图 3 根据 Ross-Warren 校正法确定校正环节的零极点位置

极点  $P_i = \frac{1}{\alpha T_i}$  和零点  $Z_i = \frac{1}{T_i}$  应像一对偶极子. 若原系统的静态品质指标为  $e$ , 则加入滞后环节后的静态品质指标为  $\alpha e$ . 应当注意的是, 系统加入滞后环节后, 根轨迹会发生变化, 变化的形式由超前环节的零极点位置确定<sup>[1]</sup>.

4.5 一个算例

一轴向电磁轴承的有关参数见表 1, 并给定下述时域指标:

$$\sigma_p \leq 5\%, \quad t_s \leq 0.002s.$$

期望主导极点  $P_A$  的位置为

$$P_A = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -1499 \pm j1530.$$

当不考虑静态指标时, 校正环节的零极点位置示于图 4 中; 若给定静态位置误差系数  $e_p = 5$ , 则

$$K_r = 4.68 \times 10^6,$$

$$K_r(P_A) = 4.70 \times 10^6,$$

$$\lambda = 128.5^\circ.$$

此时校正环节的零极点位置在图 5 中给出. 可见静态品质指标提高了, 系统的带宽要求也增加了.

另外, 对图 4 求得系统在  $P_A$  点处的开环增益  $K_0$  为

$$K_0 = 1.069 \times 10^7.$$

这时校正环节需提供的增益  $A_c$  为

$$A_c = 6940,$$

故校正环节的传递函数为

$$G_c(s) = 6940 \frac{1 + 9.09 \times 10^{-4}s}{1 + 2.27 \times 10^{-4}s}.$$

对于图 5, 校正环节的传递函数为

$$G_D(s) = 9042 \frac{1 + 7.55 \times 10^{-4}s}{1 + 1.75 \times 10^{-4}s}.$$

为了提高系统的静态品质指标, 增加一个滞后环节, 其传递函数为

$$G_l(s) = \frac{1 + T_l s}{1 + \alpha T_l s} = \frac{1 + 10s}{1 + 30s}.$$

这里  $\alpha = 3$ , 而  $|P_A - T_l| \approx |P_A - \alpha T_l|$ . 故  $G_l(s)$  的引入对原系统的动态指标影响不大, 但此时的品质指标  $e_v$  则为  $e_v = 3 \times 5 = 15, \quad e_p = \infty$ .

$e_p = \infty$  说明系统对阶跃输入信号的最终跟随误差为零;  $e_v = 15$  说明当输入信号的速率为  $1 \text{ rad/s}$  时, 系统的最终跟随误差  $e_{ssv} \leq 0.06 \text{ rad}$ , 即相对误差不会超过  $6\%$ , 这时最终得到的校正环节传递函数为

$$G_c(s) = 90420 \cdot \frac{1 + 7.55 \times 10^{-4}s}{1 + 1.75 \times 10^{-4}s} \cdot \frac{1 + 10s}{1 + 30s}.$$

4.6 实验结果与分析

经上述分析设计建立的五自由度试验装置可稳定运行, 表 2 中给出了一组系统稳定运行

表 1 一轴向电磁轴承的有关参数

$m$	$C_1$	$C_2$
4.5kg	$4.21 \times 10^6 \text{ N/m}$	1579N/A

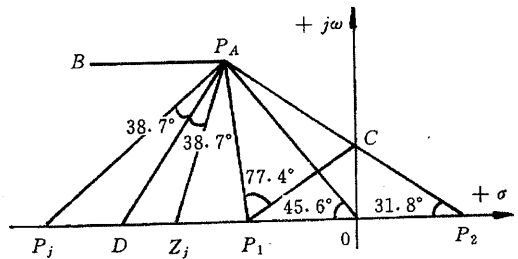


图 4 不考虑静态品质指标时, 校正环节的零极点位置

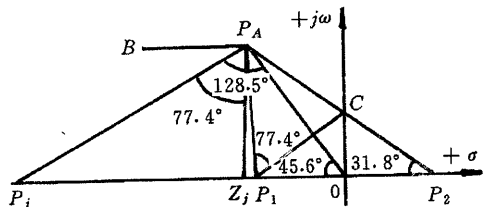


图 5 考虑静态品质指标时校正环节的零极点位置

情况下测得的部分系统参数与理论计算值的对照。可以看出,理论和实验基本吻合,误差主要是因为系统稳定参数的分布存在一个区域而非仅仅一个点<sup>[1]</sup>。

表 2 部分系统参数测试与理论计算值的对照

参数名称	$A_c$	$T_d$ (秒)	$\phi$ (度)	$T_i$ (秒)	$\alpha$	带宽(赫兹)
(普通法)理论计算值	$6.94 \times 10^3$	$9.09 \times 10^{-4}$	75.54	—	—	700
(R-W 法)理论计算值	$2.71 \times 10^4$	$7.55 \times 10^{-4}$	76.60	10	3	900
实验测试值	$2.38 \times 10^4$	0.0114	87.12	1.98	2.52	280

## 5 结束语

本文分析讨论了电磁轴承系统控制器的有关性能指标及其设计时主要考虑的问题。文献[1]介绍的确定控制器参数稳定值范围的方法,已有较高的准确性;而本文叙述的系统动态指标的校正方法,则可使所设计的系统性能快捷地达到预期的目标。这两种方法是控制器的主要设计方法,前者主要用作控制器中元器件数值的选择依据;后者则对实际调试过程给予理论上的指导。两种方法相辅相成,在设计过程中可交替应用。

## 参 考 文 献

- 汪希平. 电磁轴承系统的参数设计与应用研究. 西安交通大学博士论文, 西安, 1994
- Hisatani, M.. Identification and optimization of active magnetic bearing systems using measured Nyquist diagrams. In: G Schweitzer. Proc. of the 1st Int. Symp. on Magnetic Bearings, Switzerland, 1988, 273-280
- 陈易新, 杨恒明, 胡业发等. 轴向磁力轴承控制系统的计算辅助分析. 机床与液压, 1988, (3): 8-16
- 刘文胜. 磁力轴承控制系统设计. 轴承, 1990, (2): 11
- 曹柱中, 徐薇莉. 自动控制理论与设计. 上海: 上海交通大学出版社, 1991
- 杨位钦, 谢锡祺. 自动控制理论(上册). 北京: 北京理工大学出版社, 1991
- 吴麒, 冯元琨, 张钺. 自动控制理论与系统. 北京: 国防工业出版社, 1979

# An Application of Classical Control Theory on Active Magnetic Bearing System

WANG Xiping, CHUI Weidong and LIU Ling  
(School of Mechanical and Electrical Engineering, Research Institute  
of Bearings, Shanghai University · Shanghai, 200072, PRC)

**Abstract:** The design process is recounted in this paper that the active character of the rotor system supported by active magnetic bearings (AMBs) is adjusted with the root locus in classical control theory. One of the key cases of instability for the bearing-rotor system is that there is a right pole in complex plane. And using the method can not only solve the problems in the design process on the system stability, but also concern the provement for the picture adjustment method in classical control theory.

**Key words:** AMB system; adjustment unit; root locus; active target; static characteristic target

## 本文作者简介

汪希平 1953年生. 1994年6月西安交通大学博士毕业; 现任上海大学机械电子工程学院轴承研究室副主任, 副研究员. 主要研究方向为磁悬浮技术及电磁轴承、机电一体化仪器设备等; 发表论文十余篇.

崔卫东 1969年生. 1992年6月北京航空航天大学机械工程系机电一体化专业毕业. 现在上海大学机械电子工程学院攻读硕士学位.

刘 令 女, 1968年生. 1995年7月浙江大学物理系力学专业毕业. 现在上海大学经济管理工程学院攻读硕士学位.