

# 连续非线性系统的迭代学习控制方法\*

史忠科

(西北工业大学自动控制系·西安, 710072)

**摘要:** 本文根据误差收敛准则, 提出了连续非线性系统的迭代学习控制算法, 给出了 PID 型学习控制算法的收敛条件. 实际应用表明, 该方法可以逼近预定的任意轨线.

**关键词:** 学习控制; 智能控制; 廉价控制

## 1 引言

在研究高速运动的机械手控制时, Uchiyama<sup>[1]</sup>提出了学习控制的思想, 即不断重复一个轨线的控制尝试, 并以此修正控制率, 达到较好的控制效果. Arimoto<sup>[2]</sup>等人根据这种思想提出了迭代学习控制方法. 该方法以非常简单的控制处理不确定性动态系统, 而且仅需要较少的经验知识和计算量. 因此, 该方法日益引起人们的兴趣<sup>[3]</sup>. 但目前的研究工作主要针对结构特定的系统, 或者是一些特定的方法<sup>[4]</sup>. 为此, 本文将讨论可以重复实验的一般非线性系统学习控制方法.

## 2 问题描述

设非线性系统的状态方程和观测方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t], \\ y(t) = g[x(t), u(t), t]. \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ .

若要求系统在时间  $t \in [0, T_f]$  内的输出  $y(t)$  跟踪期望输出  $y^*(t)$ , 则需要给出  $u^*(t)$ , 使系统的输出满足工程要求.

假定系统重复运行(试验)时可以恢复初态, 即每次迭代学习的初值  $x(0)$  相同. 设第  $i$  次迭代学习的输入为  $u_i(t)$ , 则状态方程和输出方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f[x_i(t), u_i(t), t], \\ y_i(t) = g[x_i(t), u_i(t), t]. \end{cases} \quad (2)$$

学习控制的目标就是要通过对控制量的多次迭代运算, 使系统的输出误差  $e_i(t) = y^*(t) - y_i(t)$  的范数最小.

## 3 PID 型学习算法的收敛性分析

设 PID 学习算法为:

$$\begin{cases} u_{i+1}(t) = u_i(t) + G_p(t)e_i(t) + G_d(t)\dot{e}_i(t) + G_I(t)\int_0^t e_i(t)dt, \\ u_{i+1}(0) = x_i(0), \quad e(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

且系统(1)满足 Lipschitz 条件, 即

$$\begin{cases} \|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq f_0 \|x_1 - x_2\|, \\ \|g(x_1, t) - g(x_2, t)\| \leq g_0 \|x_1 - x_2\|. \end{cases} \quad (4)$$

\* 国家自然科学基金、博士点基金、航空基金、国防基金资助项目。  
本文于 1995 年 6 月 29 日收到, 1997 年 1 月 9 日收到修改稿。

其中  $f_0, g_0$  为 Lipschitz 常数.

若(1)式中,  $f, g$  关于  $x, u$  的偏导数存在, 可得:

$$\begin{aligned} e_{i+1}(t) &= y^*(t) - y_i(t) + y_i(t) - y_{i+1}(t) \\ &= e_i(t) - C_i[x_{i+1}(t) - x_i(t)] - D_i[u_{i+1}(t) - u_i(t)] \\ &= e_i(t) - C_i \int_0^t \{f[x_{i+1}(t), u_{i+1}(t), t] - f[x_i(t), u_i(t), t]\} dt \\ &\quad - D_i[u_{i+1}(t) - u_i(t)]. \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$C_i = \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\xi_i^1 \\ u=\eta_i^1}}, \quad D_i = \frac{\partial g}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\xi_i^1 \\ u=\eta_i^1}}.$$

根据中值定理,  $\xi_i^1$  介于  $x_i(t)$  和  $x_{i+1}(t)$  之间,  $\eta_i^1$  介于  $u_i(t)$  与  $u_{i+1}(t)$  之间.

通常, 非线性系统(1)很难得到解析表达式, 利用(5)式不能直接得到学习控制算法的收敛条件. 为此, 我们作以下处理.

将  $x_{i+1}$  在  $x_i$  处展开, 并令  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ , 由(2)式可得:

$$\Delta \dot{x}_i = A_i \Delta x_i + B_i \Delta u_i. \quad (6)$$

式中,  $A_i = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=\xi_i^2 \\ u=\eta_i^2}}, B_i = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{\substack{x=\xi_i^2 \\ u=\eta_i^2}}, A_i, B_i$  为  $\xi_i^2, \eta_i^2, t$  的函数.

设(6)式的状态转移阵为  $\Phi_i(\xi_i^2, \eta_i^2, t, \tau)$ , 简写为  $\Phi_i(t, \tau)$ , 根据状态转移矩阵的性质, 有  $\Phi_i(t, t) = I$ . 代入(5)式中, 可得

$$e_{i+1}(t) = e_i(t) - C_i \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B_i [u_{i+1}(\tau) - u_i(\tau)] d\tau - D_i [u_{i+1}(t) - u_i(t)]. \quad (7)$$

为了便于推导学习算法的收敛条件, 本文分三种情况讨论.

### 3.1 $D \equiv 0$ 时的学习算法及收敛条件

此时系统的输出方程中不显含输入量, 即  $y(t) = g[x(t), t]$ , 学习算法如(3)式所示. 将(3)式代入(7)式中, 可得:

$$\begin{aligned} e_{i+1}(t) &= e_i(t) - C_i \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B_i [G_p(\tau) e_i(\tau) + G_d(\tau) \dot{e}_i(\tau) + G_I(\tau) \int_0^\tau e_i(t_1) dt_1] d\tau \\ &= e_i(t) - C_i B_i G_d(t) e_i(t) - C_i \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B_i [G_p(\tau) e_i(\tau) + G_I(\tau) \int_0^\tau e_i(t_1) dt_1] d\tau \\ &\quad + C_i \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} [\Phi_i(t, \tau) B_i G_d(\tau)] e_i(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

式中应用了  $e(0) = 0$  及  $\Phi(t, t) = I$ .

假定(1)式对于  $u(t) = u_0(t)$  的状态和输出向量有界, 则学习算法的收敛条件为:

**定理 1** 当  $D \equiv 0$  时, 学习算法(3)式可使系统(1)式的输出  $y(t)$  以任意精度跟踪给定轨迹  $y^*(t)$  的充分必要条件为

$$\rho = \|I - C_i B_i G_d(t)\| < 1. \quad (9)$$

证 定义误差范数

$$\|e(\cdot)\|_\lambda = \sup_{0 < \tau \leq t} \{e^{-\lambda \tau} \|e(t)\|\}, \quad \lambda > 0. \quad (10)$$

给(8)式两端同乘以  $e^{-\lambda \tau}$ , 有

$$\begin{aligned} \|e_{i+1}\|_\lambda &= \|I - C_i B_i G_d(t)\| \|e_i\|_\lambda + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} [M_1 + \int_0^\tau M_2 e^{-\lambda(t-\tau_1)} dt_1] d\tau \|e_i\|_\lambda \\ &\leq (\rho_1 + M/\lambda) \|e_i\|_\lambda. \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$M_1 = \| C_i \{ \Phi_i(t, \tau) B_i G_p(\tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} [\Phi_i(t, \tau) B_i G_d(\tau)] \} \|, \quad M_2 = \| C_i \Phi_i(t, \tau) B_i G_I(\tau) \|,$$

$$M \geq M_1(1 - e^{-\lambda}) + M_2[(1 - e^{-\lambda})/\lambda - te^{-\lambda}].$$

当  $\rho_1 < 1$  时, 存在  $\lambda > M/(1 - \rho_1)$ . 使  $(\rho_1 + M/\lambda) < 1$ . 证毕.

### 3.2 $\text{rank}(D_i) \geq \min(m, p)$ 时的情形

为了避免微分信号对误差传播的直接影响, 此时的学习算法可表示为

$$u_{i+1}(t) = u_i(t) + G_p(t)e_i(t) + G_I(t) \int_0^t e_i(\tau) d\tau,$$

$$x_{i+1}(0) = x_i(0), \quad e(0) = 0.$$
(12)

将(12)式代入(7)式中, 可得:

$$e_{i+1}(t) = e_i(t) - C_i \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B_i [G_p(\tau)e_i(\tau) + G_I(\tau) \int_0^\tau e_i(t_1) dt_1] d\tau$$

$$- D_i [G_p(t)e_i(t) + G_I(t) \int_0^t e_i(t_1) dt_1].$$
(13)

类似定理 1 的分析, 可得学习算法(12)式的收敛条件为

**定理 2** 当  $\text{rank}(D_i) \geq \min(m, p)$  时, 学习算法(12)式收敛的充分必要条件为:

$$\rho = \| I - D_i G_p(t) \| < 1. \quad (14)$$

要求系统(1)式在  $u(t) = u_0(t)$  时状态和输出向量有界.

### 3.3 $\text{rank}(D_i) = q < \min(m, p)$ 时的情形

不失一般性, 令

$$D_i = [D_i^q, 0], \quad B_i = [B_i^q, B_i^a], \quad u = \begin{bmatrix} u^q \\ u^a \end{bmatrix}, \quad (15)$$

且  $D_i^q \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $B_i^q \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $u^q \in \mathbb{R}^q$ . 若  $D_i$  不具有  $[D_i^q, 0]$  的形式时, 可令  $u_1 = Tu$ , 对  $D_i$  进行变换即可化为(15)式.

学习算法可表示为:

$$u_{i+1}^q(t) = u_i^q(t) + G_p^q(t)e_i(t) + G_I^q(t) \int_0^t e_i(\tau) d\tau,$$

$$u_{i+1}^a(t) = u_i^a(t) + G_p^a(t)e_i(t) + G_d^a(t)\dot{e}_i(t) + G_I^a(t) \int_0^t e_i(\tau) d\tau.$$
(16)

类似定理 1, 2 的分析, 可得学习算法(16)式的收敛条件为:

**定理 3** 当  $\text{rank}(D_i) \geq \min(m, p)$  时, 学习算法(16)式收敛的充分必要条件为

$$\rho = \| I - D_i G_p^q(t) - C_i B_i G_d^a(t) \| < 1. \quad (17)$$

要求系统(1)式在  $u(t) = u_0(t)$  时状态和输出向量有界.

上述三种情况, 包含了一般非线性系统的学习控制问题.

## 4 在飞行控制中的应用

为了说明本文方法的实用性, 我们将该方法用于飞行控制中.

飞机纵向运动方程为:

$$\begin{cases} \dot{V} = A_x \cos \alpha + A_z \sin \alpha - g \sin(\theta - \alpha), \\ \dot{\alpha} = \omega_z + [A_x \cos \alpha - A_z \sin \alpha + g \cos(\theta - \alpha)]/V, \\ \dot{\theta} = \omega_z, \\ \dot{h} = V \sin(\theta - \alpha), \\ \dot{\omega}_z = f_1(\delta_p, \alpha, \omega_z, \delta_z, \dot{\alpha}). \end{cases} \quad (18)$$

其中  $V, \alpha, \theta, \omega_z, h$  分别代表飞机的速度、迎角、俯仰角、俯仰角速度和高度.  $\delta_z, \delta_p$  为升降舵偏角以及油门开度.

参考模型选为线性模型

$$\dot{x}_c = Ax_c + Bu, \quad y_c = Cx_c. \quad (19)$$

其中  $u = [\delta_z, \delta_p]^T$  为参考输入,  $x_c = [V_c \quad \alpha_c \quad \theta_c \quad h_c \quad \omega_{zc}]^T, y_c = (\alpha_c, \omega_{zc})^T$ , 且  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}, B \in \mathbb{R}^{5 \times 2}, C \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ . 控制目标是在飞机模型和参数未知的情况下, 由学习算法产生  $\delta_z$  和  $\delta_p$ , 使得飞机的滚转角速度和迎角跟随参考模型输出的变化.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0.048 & 0 & 0 & 0.063 \\ 0 & -5.88 & 0 & 0 & 0.955 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8.75 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0.068 & -0.072 \\ -0.05 & -0.02 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -6.3 & -2.52 \end{bmatrix}$$

在保持飞机飞行高度、马赫数恒定情况下的 10 次迭代计算结果如图 1 所示.

由图 1 可知, 采用学习控制可使飞机受扰后迅速回到平衡位置. 此方法可以用于地面模拟器, 以便自动选择不同高度、马赫数下的飞行控制规律.

## 5 结束语

本文给出了一般非线性连续系统的迭代学习控制方法. 当系统的输入、输出矩阵可以直接得到或用摄动法求得时, 就可确定学习算法的结构和参数. 本文的方法可用于任何可以重复实验的系统中.

## 参 考 文 献

- 1 Uchiyama, M. . Formulation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial. SICE, 1978, 14(3): 706-712
- 2 Arimoto, S. et al. . Bettering operation of dynamical systems by learning; A new control theory for servomechanisms system. Proc. of 23th IEEE CDC, 1984, 1064-1069
- 3 Heinzinek, G. et al. . Stability of learning control with disturbances and uncertain initial conditions. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1992, AC-37(1): 110-114
- 4 Tae-yong Kuo et al. . An iterative learning control theory for a class of nonlinear dynamic systems. Automatica, 1992, 28(6): 1215-1221

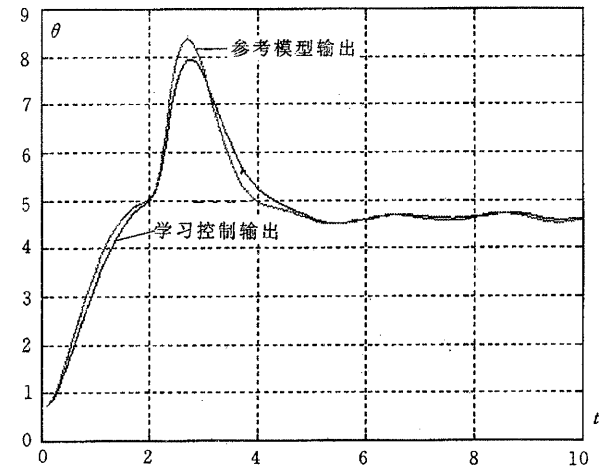
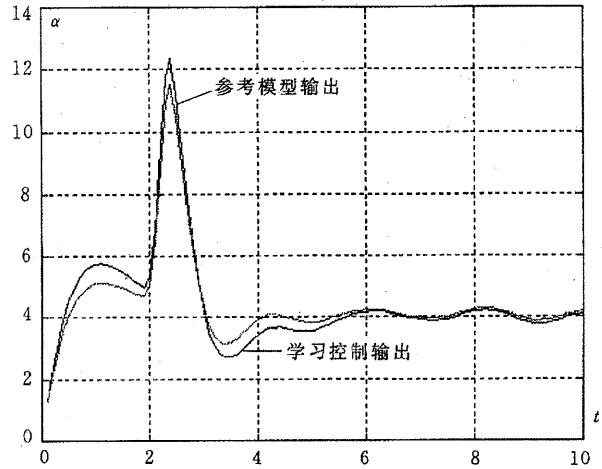


图 1 飞机纵向运动学习控制结果(采样周期  $T=0.05$ )

# Iterative Learning Control Method for Continue-Time Nonlinear System

SHI Zhongke

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University · Xi'an, 710072, PRC)

**Abstract:** Based on the criterion of error convergency, an iterative learning control theory for general continue-time nonlinear system is presented in this paper and its convergency conditions for PID-type algorithm is developed. Numerical simulation to an aircraft motion show that, by using the new algorithm, a predetermined orbit may be tracked arbitrarily.

**Key words:** learning control; intelligent control; low cost control

## 本文作者简介

史忠科 1956年生,工学博士,西北工业大学自动控制系教授,博士生导师。近年来主持了30余项实际控制系统的研究,十二项成果已经通过了部级技术鉴定;获国家教委、航空航天工业科技进步奖五项,在国内外刊物上发表论文50余篇,在国内外学术会议上发表论文50余篇;在科学出版社、西北工业大学出版社出版专著三部。主要研究领域有:随机控制,智能控制,系统辨识,飞行力学等。

## 《关肇直奖》条例

- 一、关肇直教授是中国科学院院士,国内外知名的数学家和控制理论专家。他一生致力于数学、控制科学和系统科学的研究和发展,作出了重要的贡献。为了缅怀和纪念关肇直教授,推动我国控制科学的发展,特设立关肇直奖。
- 二、关肇直奖是中国自动化学会控制理论专业委员会设立的最高青年奖。基金由国内外单位和个人捐赠,并由关肇直奖基金委员会管理。
- 三、关肇直奖的授奖对象为年龄不超过40周岁的青年作者(包括合作者)在中国自动化学会控制理论专业委员会举办的《中国控制会议》上宣读的论文。关肇直奖每年评定一次,每次获奖名额不多于两名。
- 四、凡申请关肇直奖的论文,需在投稿时注明,交论文一式九份,并附工作证(或学生证)和身份证复印件,及至少一份同行教授级专家推荐意见。请奖论文需经会议审稿通过,然后交评奖委员会委员作书面评审,定出候选论文。最后,在年会期间由评奖委员会根据论文质量及宣读水平,定出获奖者,在会议闭幕式上宣布结果并授奖。
- 五、评奖委员会每年由关肇直奖基金委员会聘请国内知名控制理论及应用专家组成。
- 六、关肇直奖基金委员会设正主任一人,副主任若干人。基金委员会负责基金的筹集和管理,组织论文的评奖与颁发,以及决定其他有关事项。具体工作委托中国自动化学会控制理论专业委员会办理。
- 七、本条例的解释权和修改权属于关肇直奖基金委员会。

## 《关肇直奖》基金委员会

主任:陈翰馥

副主任:毕大川 秦化淑

委员:王恩平 郑大钟 郑应平