

Doyle-Stein 问题的鲁棒解*

杨志勇 王广雄

(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨, 150001)

摘要: 本文用 μ 综合法对早期 H_∞ 文献中提出的一个具有输入不确定性的病态对象进行了鲁棒设计^[1], 给出了该例题的一个鲁棒解, 进一步说明了 H_∞/μ 理论是鲁棒设计的有力工具, 也为其它设计方法提供了一个可与之进行比较的结果.

关键词: 病态对象; 鲁棒解; H_∞/μ 理论

1 引言

文献[1]在 H_∞ 控制理论的形成过程中起过很重要的作用, 文中提出了一个不用奇异值来设计就不能保证系统鲁棒稳定的例子, 即设计后系统没有鲁棒性——当对象有 10% 的输入摄动时系统就不稳定了. 但该文没有正面给出正确的设计结果, 因此对其它方法的批评总似乎是单方面的. 本文考虑到该例题本身是一个具有高条件数的病态对象, 其鲁棒性能是鲁棒设计的主要问题, 故采用 μ 综合法来设计, 用以进一步说明 H_∞/μ 理论是进行鲁棒设计的系统性方法, 也为其它设计方法提供了一个可以与之比较的结果.

2 设计要求的分析

已知对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -47s+2 & -56s \\ 40s & 50s+2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

图 1 是 $G(s)$ 的奇异值 Bode 图, 从图 1 可以看出, 对象的最大奇异值曲线在低频呈微分特性, 而且对象的条件数随频率的增加而增大, 在 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 后达到很大的常值 4901.3. 一般来讲带微分项的对象特性应该认为是一种低频特性, 也就是说这个 $G(s)$ 只适用于有限的频宽, 或者说设计前应指定一个有限的频宽^[2]. 根据这个概念和对象的奇异值 Bode 图(图 1 所示)的分析, 对象的条件数在 $\omega = 0.3 \text{ rad/s}$ 处已达到 200, 超过这一值后病态问题更加严重, 将导致系统存在更加明显的方向性问题, 故取系统设计的带宽为 0.3 rad/s . 根据这个带宽的要求, 取系统的输入不确定性界函数为

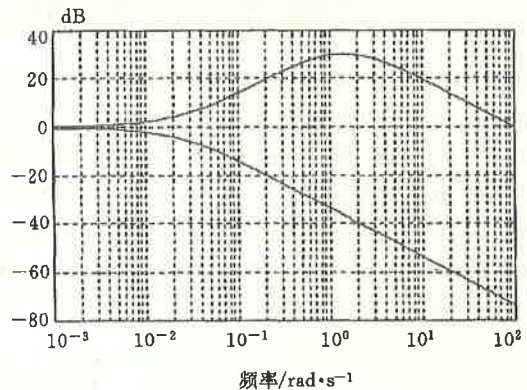


图 1 对象的奇异值 Bode 图

$$W_I(s) = \frac{3.3s + 0.1}{1.5s + 1} \quad (2)$$

上式界函数过 0dB 的频率 0.3 rad/s 可以保证设计带宽的要求, 低频段 $W_I(s) \approx 0.1$ 代表了 10% 的常值输入摄动. 同时考虑此对象是一个具有高条件数的病态对象, 鲁棒性能的设计是鲁

* 国家高等学校博士学科点专项基金资助项目(96021314).
本文于 1996 年 5 月 20 日收到.

棒设计的重要内容,选定设计的鲁棒性能权为

$$W_p(s) = 0.5 \frac{10s + \rho}{10s}. \quad (3)$$

其中 ρ 作为设计中的可调整参数,用于保证 μ 综合最优解的获得. 低频段上,性能权 W_p 的积分特性用于消除输出扰动引起的稳态误差,高频段上, $W_p(s) \approx 0.5$ 保证在对对象摄动后,代表系统性能的灵敏度函数的峰值小于 2,以满足系统对鲁棒性能的设计要求.

3 系统的 μ 综合解及鲁棒性分析

本例用 μ 综合法求解,经过计算得到最优的 μ 综合控制器 $K(s)$,此时对应的 $\rho \approx 0.425$,在有效频带内系统的 μ 值基本为 1. $K(s)$ 的奇异值 Bode 图如图 2 所示.

μ 综合所得的控制器为 28 阶,经过降阶化简后得到 8 阶的控制器,其状态空间实现为

$$K(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2007.6 & -381.8 & 116.6 & -67.9 & -29.4 & 58.7 & -19.3 & 44.7 \\ -374.1 & -71.2 & 21.7 & -15.0 & -5.5 & 11.0 & -3.6 & 8.2 \\ 112.8 & 21.5 & -6.6 & 1.3 & 0.7 & -3.3 & 1.1 & -2.6 \\ -61.0 & -16.2 & -8.0 & -994.3 & 9.1 & 19.2 & -10.1 & -40.6 \\ -13.7 & -3.1 & -0.5 & -110.9 & 0.7 & 2.5 & -1.0 & -4.4 \\ 6.6 & 1.6 & 0.4 & 69.7 & -0.6 & -1.5 & 0.7 & 2.8 \\ -54.3 & -10.9 & 1.7 & -126.3 & 0.3 & 3.9 & -1.6 & -4.0 \\ -80.8 & -16.3 & 2.4 & -199.5 & 0.9 & 6.0 & -2.7 & -6.6 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 9.7434 & -8.8601 \\ 2.8075 & -1.4299 \\ -0.7757 & 1.4812 \\ -1.6996 & 1.5019 \\ -0.1413 & 0.0562 \\ 0.1007 & -0.0492 \\ 0.0272 & -0.0800 \\ 0.0570 & -0.0863 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -117.5137 & -23.6562 & 3.5517 & -290.9138 & 1.3614 & 8.5238 & -3.8296 & -9.3876 \\ -140.1215 & -28.2537 & 4.1546 & -346.5180 & 1.1371 & 10.1277 & -4.7667 & -11.2480 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

为了更清晰地表示设计的实质,将上述控制器中的小于 0.0001 的零极点视为纯积分、微分,并略去控制器中大于 $\omega = 0.03\text{rad/s}$ 的零极点,则可以得控制器的低频模型为

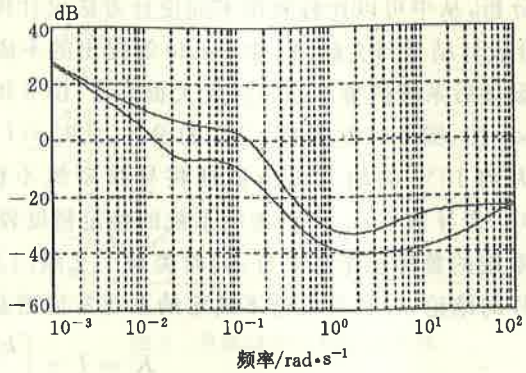


图 2 控制器的奇异值图

$$K(s) = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 0.0191 & 1.06(s + 0.008) \\ -0.955(s + 0.009) & 0.0214 \end{bmatrix} \quad (5)$$

从上式可以看出,控制器在低频段呈现积分特性,这个积分特性既保证了 H_∞ 性能设计的要求,同时也起到了降低系统带宽的作用。

对于具有输入不确定性系统的鲁棒稳定的充要条件是 $l_m < \underline{\sigma}(I + (KG)^{-1})$,其中 l_m 代表系统的输入不确定界函数.因此可以通过 $\underline{\sigma}(I + (KG)^{-1})$ 的 Bode 图对系统的鲁棒稳定性进行频域分析,从中可以比较利用不同设计方法设计得到系统的鲁棒稳定性的差异.这里通过比较 μ 综合设计结果与文献[1]中 Doyle 等提出的不成功的设计结果(此时 $K(s) = I$),可以看出 μ 综合设计后系统的鲁棒稳定性大大提高了.图 3 和图 4 是对应两种设计的 $I + (KG)^{-1}$ 的奇异值 Bode 图,图 3 对应文献[1]中的设计,此时 $\underline{\sigma}(I + (KG)^{-1})$ 在 $\omega = 2\text{rad/s}$ 频率处大约为 0.1,即大约 10% 的输入幅值摄动将导致系统不稳定;而对应 μ 综合设计,图 4 所示的 $I + (KG)^{-1}$ 奇异值 Bode 图则表明系统的稳定裕度较大,可以忍受 100% 的输入幅值摄动,表明设计后系统的鲁棒稳定性较好.同时类似于文献[1],通过考察系统增益变化的稳定域也可以得到同样的结论,设具有乘型不确定的系统常值增益阵矩阵为

$$K = I + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

即摄动后的对象 $\tilde{G}(s) = KG(s)$,图 5 和图 6 分别对应不同系统设计后 k_1 和 k_2 的稳定域,对应文献[1]中的设计, k_1 和 k_2 的稳定域很小,大约只有 0.1 左右,如图 5 所示;而对应 μ 综合的设计, k_1 和 k_2 的稳定域为 1,如图 6 所示.其结果与图 3、图 4 的频域分析是一致的,即表明 μ 综合的设计结果大大提高了系统的鲁棒稳定性。

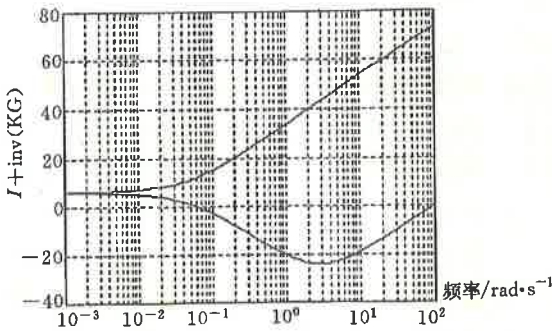


图 3 $I + (KG)^{-1}$ 奇异值 Bode 图

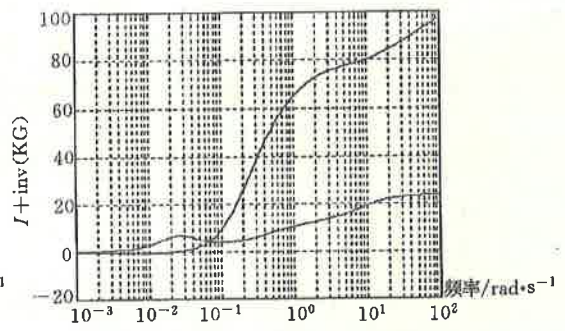


图 4 $I + (KG)^{-1}$ 奇异值 Bode 图

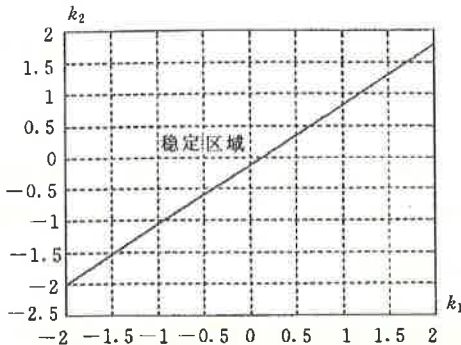


图 5 k_1, k_2 的稳定域

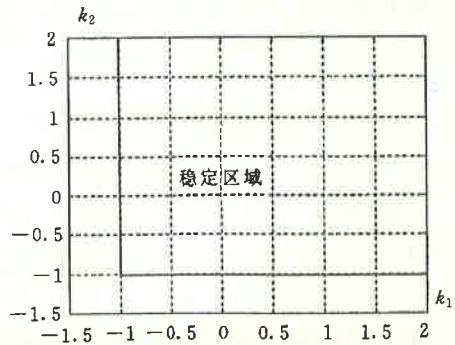


图 6 k_1, k_2 的稳定域

图 7 和图 8 分别是对对象摄动前后系统在 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 输入下的阶跃响应曲线,其中图 7 是名义系

统的仿真曲线,图 8 则是对象输入端存在 10% 幅值摄动,即

$$K = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

时的仿真曲线.从两个曲线的比较中可以看到摄动前后系统的响应特性变化不大,即系统具有较好的鲁棒性能.

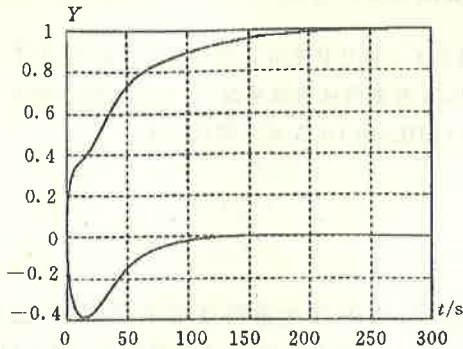


图 7 名义系统的阶跃响应

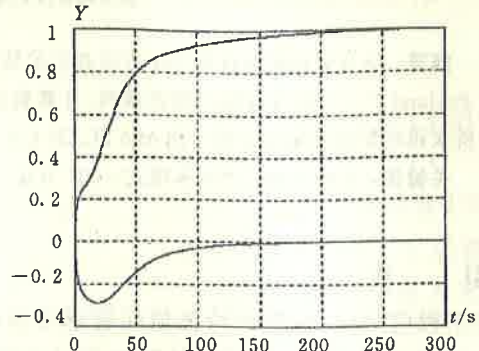


图 8 系统摄动后的阶跃响应

4 结 论

本文对 Doyle-Stein 问题作了正面求解,说明用 μ 综合法可以获得满意的鲁棒性能,从求解过程还可以看出 μ 综合法是一种系统性的控制系统综合法,只要对设计要求有正确的分析,通过标准的计算程序,就可以求得符合要求的鲁棒解.

参 考 文 献

- 1 Doyle John C. and Stein Gunter. Multivariable feedback design; concepts for a classical /modern synthesis. IEEE Trans. Automat. Contr., 1981, AC-26(1): 4-16
- 2 王广雄. 控制系统设计. 北京: 宇航出版社, 1992

The Robust Solution of Doyle-Stein Problem

YANG Zhiyong and WANG Guangxiang

(Department of Automatic Control, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: A robust solution is given in this paper for an ill-conditioned plant with input uncertainties discussed in paper [1]. It shows that the H_∞/μ control theory is a powerful tool for robust design. The result may also be served for an example to other design methods.

Key words: ill-conditioned plant; robust solution; H_∞/μ control theory

本文作者简介

杨志勇 1971 年生. 1995 年获得哈尔滨工业大学控制理论及应用硕士学位, 现在本校攻读控制理论及应用博士学位. 主要研究方向为 H_∞/μ 控制理论及应用.

王广雄 1933 年生. 1957 年哈尔滨工业大学研究生毕业, 现为哈尔滨工业大学教授, 博士生导师. 研究方向为 H_∞ 控制理论及应用, 高精度伺服系统的设计和实践.