滞后线性定常广义不确定系统的变结构控制设计*

温香彩 刘永清 丘水生
(河南师范大学数学系·河南新乡,453002) (华南理工大学电子与信息学院·广州,510641)

摘要:本文首次引入了滞后广义系统的受限等价分解形式,利用滞后正常系统的理论和无滞后广义系统的理论,研究了滞后线性定常广义系统的变结构控制设计问题. 所提供的研究方法为进一步研究滞后广义系统的其它问题(例如调节、跟踪)开创了一条新的途径.

关键词:滞后系统;广义系统;变结构控制

1 引 言

在涉及到线性过程的许多应用中,都存在有滞后影响,即事物的发展趋势不仅依赖于当前的状态,而且还依赖于事物的过去历史. 其原因就在于实际系统变量的测量、设备的各种物理性质以及信号的采集、处理和传递等多方面的因素均可导致输出响应相对于输入的时间滞后现象. 一般情况下,滞后经常产生于电子、机械、经济系统及空间中的电磁雷达和计算机的视象表层处理等现象中. 对滞后正常系统,研究历史虽已有三十年,但稳定性、镇定性理论仍处于初创阶段. 对滞后广义系统,研究几乎处于空白. 文[1]曾对解的存在性、唯一性问题进行了研究,给出了初始函数相容条件及解的形式表达式. 对稳定性、镇定性问题很少见到有关报道. 本文首先通过一坐标变换,把滞后广义系统解耦成它的受限等价分解形式:一个与控制无关的滞后正常子系统和一个与控制有关的低阶滞后广义子系统. 然后通过引入动态补偿器,把所研究的滞后广义系统综合问题化为滞后正常子系统和无滞后广义子系统的综合问题.

2 预备知识

考虑滞后线性定常广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t-\tau) + Bu(t) + Df(x,t), \tag{1}$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{2}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为 t 时刻系统的状态向量和控制向量, $f(x,t) \in \mathbb{R}^l$ 为系统的不确定量. E, A, B, C 和 D 为相容维数的常矩阵. $\varphi(t)$ 为系统在$[-\tau,0]$上给定的相容有界连续初始函数, $\tau > 0$ 为时间滞后, $\operatorname{rank}E = r < n$. 本文不考虑解的存在性和唯一性,总假定所研究的系统解存在且唯一. 本文的向量范数为欧氏范数,即 $\|x\| = (x^{\mathrm{T}}x)^{1/2}$. 作如下假设:

假设 1 $\operatorname{rank}(E,B) = n$, B 列满秩.

假设 2 $\operatorname{rank}(D,B) = \operatorname{rank}B$, $\|Df(x,t)\| \leqslant h(x,t)$, $h(x,t)$ 为已知函数.

引理 1 在假设 1 和 2 的条件下,存在可逆矩阵 M 和 N,使系统(1)、(2)受限制等价于

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + C_{11}x_1(t-\tau) + C_{12}x_2(t-\tau), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} E_2\dot{x}_2(t) = {} & A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + C_{21}x_1(t-\tau) \\ & + C_{22}x_2(t-\tau) + B_2u(t) + D_2f(x_1,x_2,t), \end{aligned} \tag{4}$$

$$x_1(t) = \phi_1(t), \quad x_2(t) = \phi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0]. \tag{5}$$

* 国家自然科学基金和国家博士后基金资助项目(69574009).
本文于 1995 年 9 月 4 日收到. 1997 年 4 月 11 日收到修改稿.

这里 $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n-m}, x_2(t) \in \mathbb{R}^m$,

$$x(t) = N\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad MEN = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad MCN = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

$$MB = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad MD = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix}, \quad N^{-1}\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [-\tau, 0].$$

证　与 $\tau = 0$ 时证明类似，详证略(参见[2]).

3　主要结果

由引理1知，(1)(2)的控制设计问题可转化为(3)～(5)的控制设计问题．利用变结构控制研究(3)～(5)的综合设计问题可分为两步：第一步设计切换函数使系统的轨道在切换流形上渐近稳定；第二步设计变结构控制律使系统在此控制作用下，在流形外的运动于有限时刻 T 到达此流形，实现滑动模运动．下面分别进行设计：

3.1　切换函数的选取

定理 1　对系统(3)～(5)，如果存在矩阵 $K_1 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ 使

$$\lambda_{\min}(Q) > 2\alpha e^{\beta\tau} \| (C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}} P \|, \tag{6}$$

则存在切换函数

$$s(t) = K_1 x_1(t) + E_2 x_2(t) + \xi(t),$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi} = & -(E_2K_1A_{11} + K_2K_1 + K_1A_{11})x_1(t) \\ & -(E_2K_1A_{12} - K_2 + K_1A_{12})x_2(t) - (E_2 + I_m)K_1[C_{11}x_1(t-\tau) + C_{12}x_2(t-\tau)], \end{aligned}$$

在切换流形 $S = 0$ 上，系统最终渐近稳定．这里 P 为 Lyapunov 矩阵方程

$$(A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m})^{\mathrm{T}} P + P(A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m}) = -Q$$

的对称正定解矩阵，$\beta > 0$，Q 为某对称正定矩阵，$\alpha = \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right)^{1/2}$，$K_2$ 满足

$$\sigma(E_2, K_2) \subset \{\lambda: \mathrm{Re}\lambda < -\gamma, \gamma > 0\}, \quad \deg\det(\lambda E_2 - K_2) = \mathrm{rank}\, E_2. \tag{7}$$

证　在切换流形 $S = 0$ 上，由 $\dot{S} = 0$ 得等效控制 $u_{eq} = -B_2^{-1}(A_{21} - E_2K_1A_{11} - K_2K_1)x_1(t) + D_2 f(x_1, x_2, t) + (A_{22} - E_2K_1A_{12} + K_2)x_2(t) + (C_{21} - E_2K_1C_{11})x_1(t-\tau) + (C_{22} - E_2K_1C_{12})x_2(t-\tau)]$. 理想滑动模运动方程为(3)及 $E_2(\dot{x}_2(t) - K_1\dot{x}_1(t)) = K_2(x_2(t) - x_1(t))$. 引入变量 $y(t)$: $y(t) = x_2(t) - K_1x_1(t)$，则理想滑动模运动方程变为

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1)x_1(t) + (C_{11} + C_{12}K_1)x_1(t-\tau) + A_{12}y(t) + C_{12}y(t-\tau), \tag{8}$$

$$E_2\dot{y}(t) = K_2 y(t). \tag{9}$$

(5)式变为 $x_1(t) = \phi_1(t), y(t) = \phi_2(t) - K_1\phi_1(t), t \in [-\tau, 0]$. (9)式为一无滞后广义线性定常系统，由(7)及解的表达式 $y(t) = e^{\hat{E}_2^D \hat{K}_2 t} y(0)$ (这里 $\hat{E}_2 = (\lambda_1 E_2 + K_2)^{-1}E_2$，$\lambda_1$ 为使 $(\lambda_1 E_2 + K_2)$ 可逆的实数，$\hat{K}_2 = (\lambda_1 E_2 + K_2)^{-1}K_2$) 知 $\| y(t) \| \leqslant e^{-\gamma} y_0$. 考虑系统

$$\dot{x}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1)x_1(t) + (C_{11} + C_{12}K_1)x_1(t-\tau), \tag{10}$$

作坐标变换 $z(t) = e^{\beta t}x_1(t)$，则(10)式变为

$$\dot{z}_1(t) = (A_{11} + A_{12}K_1 + \beta I_{n-m})z(t) + e^{\beta\tau}(C_{11} + C_{12}K_1)z(t-\tau). \tag{11}$$

对系统(11)取 Lyapunov 函数为 $V(z(t)) = z^{\mathrm{T}}(t)Pz(t)$，沿着(11)的解的轨道，$V(z(t))$ 对 t 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) &= -z^{\mathrm{T}}(t)Qz(t) + 2z^{\mathrm{T}}(t-\tau)e^{\beta\tau}(C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}}Pz(t) \\ &\leqslant -z^{\mathrm{T}}(t)Qz(t) + 2\| z^{\mathrm{T}}(t-\tau) \| e^{\beta\tau} \| (C_{11} + C_{12}K_1)^{\mathrm{T}}P \| \| z(t) \|. \end{aligned}$$

假定对 $q>1$ 有 $V(z(t-\tau))<q^2V(z(t))$，则

$$\|z(t-\tau)\|<q\alpha\|z(t)\|,$$

$$\dot V(z(t))\leqslant-[\lambda_{\min}(Q)-2\alpha q\mathrm{e}^{\beta\tau}\|(C_{11}+C_{12}K_1)^{\mathrm T}P\|]\|z(t)\|^2.$$

若(6)成立，则对某 $q>1$，$\lambda_{\min}(Q)>2\alpha q\mathrm{e}^{\beta\tau}\|(C_{11}+C_{12}K_1)^{\mathrm T}P\|$，$\dot V(z(t))$ 负定．由 Razumikhin 定理[3] 系统(11)稳定．故(10)指数稳定且具有稳定度 β，其基础解 $X(t)$ 满足 $\|X(t)\|\leqslant l_1\mathrm{e}^{\beta t}$. 由[4]，(8)具有初始条件 $x_1(t)=\phi_1(t),t\in[-\tau,0]$ 的解为 $x_1(t,0,\phi_1)=X(t)\phi_1(0)+(C_{11}+C_{12}K_1)\int_{-\tau}^{0}X(t-s-\tau)\phi_1(s)\mathrm{d}s+\int_0^t X(t-s)[A_{12}y(s)+C_{12}y(s-\tau)]\mathrm{d}s$，故有

$$\|x_1(t,0,\phi_1)\|\leqslant\|X(t)\|\ \|\phi_1(0)\|+\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\int_{-\tau}^{0}\|X(t-s-\tau)\|\ \|\phi_1(s)\|\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\|X(t-s)\|[\|A_{12}\|\ \|y(s)\|+\|C_{12}\|\ \|y(s-\tau)\|]\mathrm{d}s,$$

因为 $\phi_1(t)$ 为$[-\tau,0]$上的有界函数，所以存在 $l_2>0$ 使 $\|\phi_1(t)\|\leqslant l_2$. 把 $\|\phi_1(t)\|$，$\|X(t)\|$，$\|y(t)\|$ 的所有估计代入上式整理得

$$\|x_1(t,0,\phi_1)\|\leqslant[l_1l_2-\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\frac{l_1l_2}{\beta}-\frac{l_1\|A_{12}\|}{\beta-\gamma}y_0]\mathrm{e}^{-\beta t}$$
$$+\|(C_{11}+C_{12}K_1)\|\frac{l_1l_2}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}+\frac{l_1\|A_{12}\|}{\beta-\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}$$
$$+\frac{l_1\|C_{12}\|}{\beta-\gamma}y_0(\mathrm{e}^{-\gamma(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-\beta t+\gamma\tau}).$$

即 $\lim\limits_{t\to\infty}\|x_1(t,0,\phi_1)\|=0$. 又 $x_2(t)=y(t)+K_1x_1(t)$. 故 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$，即在 $S=0$ 上，系统渐近稳定.

推论 1　若 $E_2\equiv0$，则在定理 1 的条件下，存在切换函数 $S_1(t)$：$S_1(t)=K_1x_1+\xi_1(t)$，$\dot\xi_1=-K_1(A_{11}+I_{n-m})x_1(t)-(K_1A_{12}-I_m)x_2(t)-K_1[C_{11}x_1(t-\tau)+C_{12}x_2(t-\tau)]$，在切换流形 $S_1=0$ 上，系统渐近稳定．

证　当 $E_2\equiv0$ 时，理想滑动模运动方程为(3)和 $x_2(t)=K_1x_1(t)$. 把此式代入(3)即得(10)，由定理 1 的证明即得结论．

3.2　控制律的设计

定理 2　对系统(3)～(5)和切换函数 $S(t)$，存在变结构控制

$$u(t)=-B_2^{-1}[(A_{21}-E_2K_1A_{11}-K_2K_1)x_1(t)+(A_{22}-E_2K_1A_{12}+K_2)x_2(t)$$
$$+(C_{21}-E_2K_1C_{11})x_1(t-\tau)+(C_{22}-E_2K_1C_{12})x_2(t-\tau)$$
$$+(\|M\|h(x_1,x_2,t)+\varepsilon)\mathrm{sgn}\,S],$$

使系统在此控制的作用下，流形 $S=0$ 外的运动于有限时刻 T 到达此流形．

证　在 $u(t)$ 的作用下，通过简单计算知

$$S^{\mathrm T}\dot S(t)=S^{\mathrm T}[-(\|M\|h(x_1,x_2,t)+\varepsilon)\mathrm{sgn}\,S+D_2f(x_1,x_2,t)]\leqslant-\varepsilon\|S\|.$$

即 $\frac{\mathrm d}{\mathrm dt}\|S\|\leqslant-\varepsilon$. 从 t_0 到 t 积分上式得 $\|S(t)\|-\|S(t_0)\|\leqslant-\varepsilon(t-t_0)$. 注意到 $\|S(t)\|\geqslant0$，故存在时刻 T：$0<T\leqslant\frac{\|S(t_0)\|}{\varepsilon}+t_0$，使 $\|S(T)\|=0$.

推论 2　对系统(3)～(5)，当 $E_2\equiv0$ 时，存在变结构控制

$$u_1(t)=-B_2^{-1}[x_2(t)-K_1x_1(t)+A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)+C_{21}x_1(t-\tau)+C_{22}x_2(t-\tau)$$

$$+(\|M\|h(x_1,x_2,t)+\varepsilon)\mathrm{sgn}\,S_1(t)],$$

使系统在此控制的作用下，在流形 $S_1=0$ 外的运动与有限时刻 T 到达此流形．

证 略．

4 结束语

本文首次通过引入滞后广义系统的受限等价分解形式和动态补偿器，研究了滞后线性定常广义不确定系统的变结构控制设计问题．有兴趣的读者可利用本文所建立的方法研究滞后广义系统的调节和跟踪问题．此外，由于篇幅所限，本文只给出了系统到达滑动模的控制器设计，闭环系统中静态变量的稳定性问题需进一步讨论，参见[6].

参考文献

1 Campbell, S. L.. Singular systems of differential equations. Pitman Advanced, 1980, 49－56
2 温香彩，刘永清．奇异不确定系统的滑动模控制．控制理论与应用，1995，12(1)：114－119
3 Hale, J.. Theory of Functional Equations. New York: Springer-Verlag, 1997
4 秦元勋，刘永清，王联，郑祖休著．带有时滞的动力系统的运动稳定性．北京：科学出版社，1989
5 Dai, L.. Singular Control Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 118
6 刘永清，温香彩．广义系统的变结构控制．广州：华南理工大学出版社，1997

Design of Variable Structure Control for Linear Time-Invariant Singular System with Time-Delay

WEN Xiangcai
(Department of Henan Normal University · Henan Xinxiang, 453002, PRC)
LIU Yongqing and QIU Shuisheng
(College of Electronic and Information, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: The problem of design of variable structure control for linear time-invariant singular system with time-delay is considered in this paper by employing the theories of normal system with time-delay and singular system without time-delay, and the equivalent restricted decomposition form introduced. The method presented gives a novel sight to study the other problem (such as requlator, track) of singular system with time-delay further.

Key words: time-delay system; singular system; variable structure control

本文作者简介

温香彩 1964年生．河南师范大学数学系教授．1995年在华南理工大学自动化系获博士学位，1995年7月至1997年7月在华南理工大学电子与信息学院做博士后研究．研究兴趣为广义系统的变结构控制，分支与混沌控制，非线性系统的鲁棒控制等．

刘永清 1930年生．博士生导师．华南理工大学电子与信息学院教授．研究兴趣为非线性复合大系统的稳定与镇定．

丘水生 1936年生．博士生导师．华南理工大学电子与信息学院教授．研究兴趣为非线性电路系统分析、分支与混沌．