第 15 卷第 1 期
1998 年 2 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 15, No. 1
Feb., 1998

限制解耦控制的充分必要条件*

何关钰
(上海交通大学应用数学系·上海,200030)

摘要:本文利用初等变换方法推得非方系统限制解耦控制的充分必要条件.

关键词:非方系统;限制解耦控制;初等变换

1 引　　言

设有线性定常系统 (A,B,C):

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu,\\ y = Cx.\end{cases} \tag{1}$$

其中,x,u,y 的维数分别为 n,p,m,$p \geqslant m$. 如果存在 $p \times n$ 阶矩阵 K 和 $p \times m$ 阶矩阵 F,使反馈系统 $(A+BK,BF,C)$ 的传递函数阵为非异对角阵,则称(1)为可解耦系统. 系统的解耦问题是三十年前首先由 Morgan 提出的[1],故也称为 Morgan 问题. 显然,可解耦系统必需是右可逆系统,因此,以下总设 (A,B,C) 右可逆.

对于 $p=m$,即方系统情形,该问题早已解决,不仅推得判别可解耦的充分必要条件,也提出一些具体的解耦方法. 而对于非方系统,$p>m$,虽然至今已有不少研究成果,但问题仍未得到完全解决.

本文讨论的问题为,是否存在 $p \times m$ 阶矩阵 G,使方系统 (A,BG,C) 可解耦,即所谓的限制解耦控制问题[3]. 以后凡提及系统可解耦,都是指上述意义. 文中利用初等变换,给出判定的充分必要条件以及 G 的具体求法,还讨论了使系统可解耦的向量组合.

2 准备工作

记

$$d_i = \min\{j: C_iA^jB \neq 0\}, \tag{2}$$

$$D = \begin{bmatrix} C_1A^{d_1}B \\ \vdots \\ C_mA^{d_m}B \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$S_i = \begin{bmatrix} C_iA^{d_i+1}B \\ \vdots \\ C_iA^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中,$i=1,2,\cdots,m$,C_i 是 C 的第 i 个行向量. 由于右可逆,$d_i \leqslant n-1$,如果 $d_i = n-1$,则 S_i 视作"空"阵.

对于数组 $l_i \geqslant d_i$,$i=1,2,\cdots,m$,如果存在矩阵 G 使以下两式成立:

i)
$$l_i = \min\{j: C_iA^jBG \neq 0\}, \tag{5}$$

ii)
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} C_1A^{l_1}B \\ \vdots \\ C_mA^{l_m}B \end{bmatrix} G = m, \tag{6}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目(69374006).

本文于 1996 年 2 月 6 日收到. 1997 年 3 月 17 日收到修改稿.

则方系统 (A,BG,C) 可解耦，称 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组. 可见，系统可解耦的充分必要条件是存在可解耦向量组.

为叙述方便，对以后的变换过程作如下约定：

1) 若对 D 进行列变换，则 $S_1,\cdots,S_m$ 也作相同列变换，G 作相应行变换以保持 DG 不变.

2) 若 G 的某行取为零行，则在乘积 DG 中，D 以及有关联的 $S_1,\cdots,S_m$ 中相应的列将不起作用，所以这些行和列都可以划去，文中对此简述为：划去 D 的某列.

3) 为简化记号，经过变化后的各矩阵，仍用原来的记号表示.

4) 如果某矩阵的行或列全部被划去，则该矩阵作"空"阵处理.

3 主要结果

在上节约定下，以式(3)的 D 开始按以下步骤进行变换.

1° 设 $r_1 = \operatorname{rank} D$. 如果 $r_1 < m$，则适当交换行次序，再用列变换把 D 化为

$$D = \left.\begin{bmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ \times & \cdots & \times & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \times & \cdots & \times & \end{bmatrix}\right. \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 0\end{matrix}}\right\} r_1 \\ \vphantom{\begin{matrix}\times\\ \vdots\\ \times\end{matrix}} \end{matrix} . \tag{7}$$

D 的第 1 至第 r_1 列中，每列都至少有一个非零元 1，如果某列除此之外还有别的非零元，则划去该列. 当然，D 可能被划成一个零阵.

假若 D 的某行因此变成零行，并且它原先是与 C_i 相应的. 如果这时 S_i 已经是"空"阵或零阵，则步骤结束. 反之，就从 S_i 中自上而下取出第 1 个非零行，用它去交换 D 的那个零行. 同时，把 S_i 的该行及其上方的零行划去，意即不再使用.

2° 设 $r_2 = \operatorname{rank} D$. 如果 $r_2 < m$，则和第 1°步相同方法进行，步骤或者结束或者继续.

接下来的步骤依此类推.

定理 1 系统 (A,B,C) 可解耦的充分必要条件为，上述步骤进行至第 k 步时，$r_k = \operatorname{rank} D = m$.

证 若 $r_1 = m$，则系统可解耦，现设 $r_1 < m$. 如果式(7) 的 D 的第 j 列中非零元超过一个，该列第 j 行的元已经是 1，那么另有非零元在第 q 行，$q > r_1$. 用 $g_1,\cdots,g_m$ 表示 DG 的行向量，易见 $g_1,\cdots,g_{r_1}$ 就是 G 的前 r_1 行. 若 $g_j \neq 0$，当 $g_q = 0$ 时，$g_1,\cdots,g_{r_1}$ 线性相关，而 $g_q \neq 0$ 时，g_q 可由 $g_1,\cdots,g_{r_1}$ 线性表示，说明总有 $\operatorname{rank} DG < m$. 可见，要进一步判断系统是否可解耦，必需 $g_j = 0$，按约定的提法，就是划去 D 的第 j 列.

这样，D 的某些行变成零行，比如第 j 行. 设它相应于变换前的 $C_iA^{d_i}B$(因为交换过行次序)，就需要从 S_i 中另取一个非零向量来替代. 如果 S_i 已经是"空"阵或零阵，无法替代，说明系统不可解耦. 反之，替代后进入第 2° 步.

第 2° 步的讨论和上面相同，依此类推. 由于步骤是有限的，即 $S_1,\cdots,S_m$ 中总会出现"空"阵或零阵，假若直至结束，总是 $\operatorname{rank} D < m$，则系统不可解耦；假若进行到第 k 步，$r_k = m$，则存在 G 使 $\operatorname{rank} DG = m$，再按步骤退回去，删去的列相应补上，$G$ 的相应行补以零行，退回后的 G 以及 D 的行 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 使式(5)和(6)成立，系统可解耦. 定理证毕.

推论 系统可解耦的必要条件是，以上步骤中，每一步开始时 D 的列数 $\geq m$.

此结论显然，因为如果 D 的列数已经 $< m$，必有 $\operatorname{rank} DG < m$. 因此，被划去的列数累计不

可超过 $p-m$ 个，步骤至多进行 $p-m+1$ 步.

4 可解耦向量组

设系统 (A,B,C) 可解耦，则上节的步骤已经给出一组可解耦向量的求法，当然，可解耦向量组不一定仅此一组，本节讨论 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组的条件，即是否存在 G 使式(5)和(6)成立. 仍记

$$D=\begin{bmatrix} C_1A^{l_1}B \\ \vdots \\ C_mA^{l_m}B \end{bmatrix} \tag{8}$$

Q 表示由向量 $C_1A^{d_1}B,\cdots,C_1A^{l_1-1}B,C_2A^{d_2}B,\cdots,C_2A^{l_2-1}B,\cdots,C_mA^{d_m}B,\cdots,C_mA^{l_m-1}B$ 为行构成的矩阵. 那么，式(5)和式(6)相当于以下两式：

$$QG=0, \tag{9}$$

$$\operatorname{rank} DG=m. \tag{10}$$

定理 2 $C_1A^{l_1}B,\cdots,C_mA^{l_m}B$ 为可解耦向量组的充分必要条件是，通过列变换，可以把矩阵 $\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix}$ 化成以下形式：

$$\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} I_m & 0 \\ \hdashline 0 & \bar{Q} \end{array}\right]. \tag{11}$$

证 充分性. 只需取 $G=\begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$ 即可使式(9)和(10)成立.

必要性. 由(10)推知 $\operatorname{rank} D=m$，先用列变换化成

$$\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} I_m & 0 \\ \hdashline Q_1 & Q_2 \end{array}\right].$$

如果 $Q_2=0, Q_1\neq 0$，则一切使 $QG=0$ 的 G，都有 $\operatorname{rank} DG<m$，与题设矛盾. 如果 $Q_2\neq 0$，那么设 $\operatorname{rank} Q_2=r$，适当交换 Q 的行次序后，就可用列变换进一步化为

$$\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c} I_m & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & I_r & 0 \\ \hdashline Q_3 & Q_4 & 0 \end{array}\right].$$

如果 $Q_3\neq 0$，则一切使 $QG=0$ 的 G，仍有 $\operatorname{rank} DG<m$，与题设矛盾. 从而 $Q_3=0$，这就是(11)的形式. 定理证毕.

5 例

设有系统 (A,B,C)，其中

$$n=11,\quad m=3,\quad p=6,$$

$$D=\begin{bmatrix} C_1B \\ C_2B \\ C_3B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_1=\begin{bmatrix} C_1AB \\ C_1A^2B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2=\begin{bmatrix} C_2AB \\ C_2A^2B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_3=\begin{bmatrix}C_3AB\\C_3A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\2&-1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$C_iA^jB=0,\quad i=1,2,3,\quad j>2.$$

第1步 $r_1=\operatorname{rank}D=2$,用列变换把 D 化成

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

按步骤划去第2列,S_1,S_2,S_3 经相同列变换后再划去第2列,分别化为

$$S_1=\begin{bmatrix}1&2&-2&-1&0\\2&4&-5&-2&1\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix}-1&-2&3&1&-1\\-1&-5&4&1&-2\end{bmatrix},$$

$$S_3=\begin{bmatrix}0&-2&1&0&-1\\3&5&-7&-3&1\end{bmatrix}.$$

这时,D 中有二个零行,相应于 C_2B 和 C_3B,分别用 S_2 和 S_3 的第1行去替换.

第2步
$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\-1&-2&3&1&-1\\0&-2&1&0&-1\end{bmatrix},$$

有 $\operatorname{rank}D=3$,说明系统可解耦,C_1B,C_2AB,C_3AB 是可解耦向量组.

接下来看向量组 C_1AB,C_2AB,C_3AB,这时

$$D=\begin{bmatrix}C_1AB\\C_2AB\\C_3AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}C_1B\\C_2B\\C_3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2&1&0\\1&1&2&-1&0&1\\1&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

则 $\operatorname{rank}D=3$,并且用列变换可化为

$$\begin{bmatrix}D\\Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_3&0\\0&\overline{Q}\end{bmatrix},\quad \overline{Q}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\\-1&0&1\end{bmatrix}.$$

根据定理2,C_1AB,C_2AB,C_3AB 也是可解耦向量组.

再看向量组 C_1AB,C_2A^2B,C_3AB,这时,

$$D=\begin{bmatrix}C_1AB\\C_2A^2B\\C_3AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&2&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$Q=\begin{bmatrix}C_1B\\C_2B\\C_2AB\\C_3B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-1&2&1&0\\1&1&2&-1&0&1\\0&1&1&0&0&0\\1&1&2&-1&0&1\end{bmatrix}.$$

虽然 $\operatorname{rank}D=3$,经列变换却化得

$$\begin{bmatrix} D \\ Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} I_3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & I_2 & 0 \\ \hdashline Q_3 & Q_4 & 0 \end{array}\right], \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由定理 2，C_1AB，C_2A^2B，C_3AB 不是可解耦向量组.

参 考 文 献

1 Morgan, B. S.. The synthesis of linear multivariable systems by state feedback. JACC, 1964, 468－472

2 Descusse, J., Lafay, J. F and Malabre, M.. Solution to Morgan's problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1988, AC-33 (8): 732－739

3 Kamiyama, S. and Furuta, K.. Decoupling by restricted state feedback. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21(3): 413－415

4 陈树中. Morgan 问题：输入数＝输出数＋1 情形. 自动化学报, 1993, 19(5): 520－526

5 何关钰. 线性控制系统理论. 沈阳：辽宁人民出版社, 1983, 441－451

Necessary and Sufficient Conditions for the Restricted Decoupling Control

HE Guanyu

(Department of Applied Mathematics, Shanghai Jiaotong University · Shanghai, 200030, PRC)

Abstract: In this paper a necessary and sufficient conditions for the restricted decoupling control of nonsquare linear systems is obtained by elementary transformation.

Key words: nonsquare system; restricted decoupling control; elementary transformation

本文作者简介

何关钰　1939 年生. 1962 年毕业于南开大学数学系，现为上海交通大学应用数学系教授. 目前研究领域为线性系统理论及其应用.