

## 反馈控制系统 Delta 算子理论的研究与发展\*

张端金 杨成梧

(南京理工大学动力工程学院·南京, 210094)

**摘要:** 反馈控制系统的 Delta 算子理论在高速信号处理与数字采样控制领域具有重要作用。本文对 Delta 算子方法的研究现状与存在问题进行综述, 内容涉及 Delta 算子模型描述与转换、系统辨识与状态估计、自适应控制与预测控制、鲁棒控制与  $H_\infty$  控制、数字滤波器实现等方面, 并探讨了将来的发展方向。

**关键词:** 离散系统; 采样系统; Delta 算子; 计算机控制

### 1 引言

自 Middleton 和 Goodwin 的研究工作<sup>[1]</sup>发表以来, 尤其是两位合著的《Digital Control and Estimation—A Unified Approach》<sup>[2]</sup>一书出版之后, Delta 算子或变换作为一种新的离散化方法引起从事控制理论和信号处理方面研究人员的普遍关注和研究兴趣, 并得到较为系统深入的研究, 取得了许多研究成果<sup>[3]</sup>。近几年的 IEEE 自动控制汇刊和信号处理汇刊、国际控制杂志、美国控制会议 (ACC) 以及 IEEE 控制与决策会议 (CDC) 等均有多篇关于 Delta 算子方法的研究论文发表。

众所周知, 当采样周期很小时, 若采用传统的移位算子或  $Z$  变换对系统进行离散化, 将导致采样系统的所有极点位于稳定边界上, 在有限字长的计算机中实现时, 引起量化误差、极限环振荡等数值不稳定问题; 且易于引入非最小相位零点<sup>[4]</sup>, 使离散化后的系统稳定性变差。为此, 澳大利亚的控制理论专家 Goodwin<sup>[1, 13]</sup> 教授等建议采用 Delta 算子 (或增量差分算子) 来离散化连续系统, 在快速采样情形下使其离散模型趋近于原来的连续模型。Delta 算子现已成为连续时间模型和离散时间模型的统一描述方法, 既避免了  $Z$  变换引起的数值不稳定问题, 又使得传统的用于连续域的各类设计方法可直接用于离散域设计, 在高速信号处理、宽带通讯与数字采样控制方面具有广阔的发展前景。目前 Delta 算子理论在最优滤波<sup>[5]</sup>、系统辨识<sup>[6]</sup>、自适应控制<sup>[7]</sup>、信号处理<sup>[8]</sup>、预测控制<sup>[9]</sup>、鲁棒控制<sup>[10]</sup>、容错控制<sup>[12]</sup>、故障检测<sup>[14]</sup>、分散控制<sup>[15]</sup>、滑模控制<sup>[16]</sup> 以及 2D 系统<sup>[17]</sup> 等控制与估计的许多领域获得成功, 取得了一系列新进展和新结果。本文就几个主要问题进行评述, 并指出了 Delta 算子理论今后的研究方向。

### 2 Delta 算子系统的模型描述

Delta 算子或称 Euler 算子, 定义为<sup>[2]</sup>

$$\delta = \frac{q - 1}{T} \quad (1)$$

其中  $q$  为前向移位算子, 即  $qx(k) = x(k+1)$ ,  $T$  为采样周期。

考虑线性时不变 (LTI) 连续系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

式中  $x, u, y$  分别为  $n, m, p$  维状态、控制、输出向量,  $A, B, C$  分别为相应维数的常值矩阵。

\* 国家自然科学基金 (No. 69474021) 和国家教委博士点基金资助项目。

本文于 1996 年 12 月 17 日收到, 1997 年 9 月 17 日收到修改稿。

其  $Z$  域离散化模型为

$$qx(k) = A_q x(k) + B_q u(k), \quad y(k) = C_q x(k). \quad (3)$$

其中

$$A_q = e^{AT}, \quad B_q = \int_0^T e^{A^t} B dt, \quad C_q = C. \quad (4)$$

(2) 式的  $\delta$  域离散化模型为

$$\delta x(k) = A_\delta x(k) + B_\delta u(k), \quad y(k) = C_\delta x(k). \quad (5)$$

式中

$$A_\delta = (A_q - I)/T, \quad B_\delta = B_q/T, \quad C_\delta = C_q \quad (6)$$

当  $T \rightarrow 0$  时, 由(4)和(6)式可分别得到

$$A_q \rightarrow I, \quad B_q \rightarrow 0; \quad A_\delta \rightarrow A, \quad B_\delta \rightarrow B. \quad (7)$$

由此可见, 利用这种新的算子来描述离散采样系统, 具有如下特点: 1) 当采样周期趋于零时, Delta 算子系统的模型参数趋于相应的连续时间模型参数, 所得结果也趋于连续情形的相应结果. 2) Delta 算子模型中采样周期作为显式参数, 便于观察和分析不同采样周期下控制系统的性能. 3) Delta 算子实现时具有好的数字特性, 包括有限字长特性、系数灵敏度等方面均优于移位算子.

目前, 关于 Delta 变换、 $Z$  变换和 Laplace 变换模型的相互转换已有文献涉及, 取得了一些成果. 文[11]研究  $\delta$  域和  $Z$  域传递函数模型的相互转换问题, 且较为全面地分析了 Delta 算子模型的特性. 文献[18]给出了  $\delta$  域和  $Z$  域多项式模型的转换结果, Hersh<sup>[19]</sup>根据复变函数理论, 讨论  $S$  域和  $\delta$  域模型之间的直接转换算法, 并研究了闭环零极点对系统性能的影响. Hori<sup>[20,21]</sup>等探讨各种离散化模型之间的等价关系. 文[22]推导出一种求取离散化模型系数的简单方法.

Premaratne 和 Jury 进一步研究了  $\delta$  域多项式根的稳定性问题<sup>[23]</sup>及其多项式阵列判别方法<sup>[24]</sup>. 邹云、杨成梧和翟长连<sup>[25]</sup>对  $\delta$  算子系统的能控性与能稳性进行了较为深入的研究, 分析结果表明在高速采样情形下  $\delta$  算子系统的能控度和能稳度均优于常规的  $q$  算子. 此外, 文[26]基于  $\delta$  算子提出一种新的零极点匹配模型, 在对连续模型离散化时不需要进行增益调整和无穷远零点处理, 当采样周期趋于零时, 零极点匹配模型也趋于原来的连续模型. 迄今受到 Delta 算子方法的影响与启发, 已有人提出  $\rho$  算子<sup>[27]</sup>和  $\gamma$  算子<sup>[28]</sup>, 它们是更为广泛的一类离散化算子, 其基本思想与  $\delta$  算子相同, 在此不再赘述.

### 3 Riccati 方程和 Lyapunov 方程的研究

Riccati 方程和 Lyapunov 方程在控制与估计问题的研究中具有重要作用. 许多控制和估计问题需要解这两类方程, 然而当矩阵维数增大时, 方程求解相当困难. 为此对方程解的特征值、迹和行列式等的上下界进行研究, 具有实用价值, 现已取得大量研究成果<sup>[29]</sup>. 最近, 本文作者给出离散 Riccati 代数方程解的  $\text{tr}(P)$  的两个新结果<sup>[30]</sup>, 减少了估计的保守性. Delta 算子的引入, 使得可以将离散代数 Riccati 方程(DARE)和连续代数 Riccati 方程(CARE)统一起来进行研究.

考虑基于  $\delta$  算子描述的统一代数 Riccati 方程(UARE)

$$A^T P + PA + TA^T P A - (TA + I)^T P B (I + TB^T P B)^{-1} B^T P (TA + I) + Q = 0. \quad (8)$$

上式经矩阵恒等变换可转化为

$$P = (TA + I)^T (P^{-1} + TBB^T)^{-1} (TA + I) + TQ. \quad (9)$$

在(8)式中,令采样周期  $T = 0$ , 可得连续代数 Riccati 方程(CARE)

$$A^T P + PA - PBB^T P + Q = 0. \quad (10)$$

在(9)式中,令采样周期  $T = 1, A + I = A_d$ , 可得离散代数 Riccati 方程(DARE)的改进形式

$$P = A_d^T (P^{-1} + BB^T)^{-1} A_d + Q. \quad (11)$$

最近 Kwon<sup>[29]</sup>对 Riccati 方程和 Lyapunov 方程解的上下界研究进行了系统总结,并给出了  $\delta$  算子 Riccati 方程解的一些结果. 在此我们给出由  $Z$  域到  $\delta$  域转换结果的简单求取方法.

在 DARE(11)式中,令  $P = P/T, B = TB, A = TA + I, Q$  保持不变,再利用下面两个重要公式<sup>[2]</sup>:

$$|\lambda_i(I + TA)|^2 = 1 + T(2\operatorname{Re}\lambda_i(A) + T|\lambda_i(A)|^2). \quad (12)$$

$$\lambda_i((I + TA)(I + TA)^T) = 1 + T\lambda_i(A + A^T + TAA^T). \quad (13)$$

即可将  $Z$  域离散结果转换到  $\delta$  域情形. 其中  $\lambda_i(X)$  表示矩阵  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的第  $i$  个特征值.

目前 Delta 算子 Riccati 方程和 Lyapunov 方程的研究工作已取得一些进展. Mrabti 和 Benseddik<sup>[31]</sup>给出了  $\delta$  算子代数 Riccati 方程特征值的下界估计. Mrabti 和 Hmamed<sup>[32]</sup>探讨了  $\delta$  算子稳态 Lyapunov 方程的上下界确定方法,且进一步研究了非稳态情形下 Lyapunov 方程解的特征值的定界估计问题<sup>[33]</sup>. 有关  $\delta$  域和  $Z$  域 Lyapunov 方程的关系研究参见[34].

#### 4 系统辨识与状态估计

系统辨识是指通过被控对象的输入输出数据来建立系统数学模型的理论和方法,是控制理论的一个重要分支. 以往大多根据对象的实际情况而决定选用连续系统辨识或离散系统辨识方法,两者之间没有直接的对应关系. Delta 算子作为连续与离散模型的统一描述,在系统辨识领域取得了一些进展,目前研究较多的是 Delta 域自回归模型(DAR)的辨识问题. 文[6]给出在快速采样时对 AR 模型进行辨识的 Levinson-Durbin 算法,其算法的数值稳定性优于传统的  $q$  算子. Fan<sup>[35,36]</sup>等基于后向差分算子(定义为  $\delta_b = (1 - q^{-1})/T$ )提出了建模 AR 参数的 Levinson 和 Schur 型最小二乘法,将所得结果推广到带噪声的 AR 过程,并对前向差分和后向差分 Delta 算子的性能进行了比较. 文[37]研究了基于  $\delta$  算子辨识算法的实时实现,证明了其数值稳定性好于  $q$  算子描述的辨识算法. 此外, Wahlberg<sup>[38]</sup>分析了快速采样系统辨识的极限结果,给出噪声模型相对阶次的选取方法. Delta 算子辨识方法还可向更为广泛的 ARMAX 模型和 Box-Jenkins 模型推广. 有关 Delta 算子辨识的实际应用可参阅文献[39,40].

Delta 算子系统最优滤波与状态估计理论也得到了发展, Goodwin<sup>[5,41]</sup>等提出 Kalman 滤波方法,分析了 Delta 域 Riccati 方程解的数字特性. Jabbari 基于 Delta 算子给出最小二乘算法的格形滤波器<sup>[8]</sup>,且进一步导出格形滤波实现的辅助变量法<sup>[42]</sup>. 最近 Niu<sup>[43]</sup>等提出一种基于信息压缩阵(AIM)的 UD 分解算法来实现模型结构和参数的同时辨识,这种方法在 Delta 算子系统辨识中的应用值得进一步研究,另外基于奇异值分解(SVD)理论的 Delta 算子最优滤波与状态估计问题仍有待于深入研究. 而有关 Delta 算子系统的鲁棒辨识和鲁棒滤波更是具有挑战性的研究课题.

#### 5 自适应控制与预测控制

一般情形下,自适应控制系统可分为模型参考自适应控制(MRAC)和自校正控制(STC)两大类,前者起源于确定性连续系统的跟踪控制,而后者起源于随机离散系统的扰动调节,两种控制方案各有特点又有关联. Goodwin<sup>[13]</sup>等基于 Delta 算子描述建立起连续时间和离散时间模型参考自适应控制的密切联系. 证明了采用 Delta 算子可以避免因快速采样而引起的非

最小相位零点,分析了自适应算法的收敛性,并在[7]中做了全面的分析和阐述. Janecki<sup>[44]</sup>在文[13]的基础上得到 Delta 算子 MARC 系统稳定性的一个新结果. 基于 Delta 算子的自校正控制器(DSTC)是由 Gawthrop<sup>[45]</sup>在 1980 年给出的,此后逐渐引起控制理论界的研究兴趣, Delta 算子自适应控制理论已在快速伺服系统<sup>[46]</sup>和飞行控制<sup>[47]</sup>等领域获得成功的应用.

为了克服最小方差自校正和极点配置自校正算法的不足与缺陷,Clarke 等提出广义预测控制(GPC)算法,基于 CARIMA 模型,采用滚动优化和反馈校正实现对系统的在线控制,收到很好的控制效果. 最近 Neumann<sup>[9]</sup>等在吸取 GPC 和 CGPC 各自优点的基础上,提出 Delta 算子广义预测控制(DGPC)算法,并将其应用于高速伺服系统的位置控制<sup>[48]</sup>. 文[49]提出了基于 ARMAX 模型描述的状态空间 DGPC 方法,其算法复杂性低于常规的预测控制. 此外,文[50]应用 DGPC 算法解决了一类参考模型的跟踪问题. 基于 SVD 方法的 Delta 算子广义预测控制仍有待进一步研究.

## 6 鲁棒控制与 $H_\infty$ 控制

不确定系统的鲁棒控制理论所要研究的问题包括控制系统的分析和综合两个方面. 鲁棒分析是指:当系统存在各种不确定性及外加干扰时,系统性能变化的分析;而鲁棒综合是指:采用什么控制结构、利用何种设计方法可保证控制系统具有更强的鲁棒性. 目前一般将鲁棒控制的研究方法分为两类. 一是以分析系统性能特别是稳定性为基础的系统鲁棒性分析和设计,其中包括 Kharitonov 检验理论,结构奇异值分析方法,参数空间法,Popov 判据和绝对稳定性理论在系统鲁棒性分析中的应用等. 二是以某种性能指标的优化为设计依据的控制理论,其中发展最快的当属  $H_\infty$  控制理论. 在  $H_\infty$  控制系统分析中,小增益定理和二次稳定理论起了重要作用. Doyle<sup>[51]</sup>等在 1989 年对  $H_\infty$  控制的状态空间方法进行了系统总结,强调  $H_\infty$  控制与 LQG 控制之间的联系,这篇通称为 DGKF 的论文极大地推动了基于 Riccati 方程方法的  $H_\infty$  控制的研究工作. 此外,混合  $H_2/H_\infty$  控制和  $H_\infty$ /LTR 控制的研究也取得了较大进展. 近期  $H_\infty$  控制中的线性矩阵不等式(LMI)<sup>[52]</sup>方法受到人们关注,控制界正在兴起一个 LMI 方法应用的研究热潮.

总的来说,连续时间不确定系统的鲁棒控制理论得到了很大发展,已颇具规模;有关离散时间系统和采样数据系统鲁棒控制的研究显得相对薄弱. 而基于 Delta 算子描述的不确定系统的鲁棒控制与  $H_\infty$  控制的研究结果则更为少见. Soh<sup>[10,53]</sup>分析了 Delta 算子系统的鲁棒稳定性,给出了保证系统稳定的特征方程系数的最大摄动区间. 文[54]分析并给出了 Delta 算子多项式 Kharitonov 检验的顶点结果. Piou 等引入矩阵测度方法分析 Delta 系统的鲁棒稳定性<sup>[55]</sup>,采用 Lyapunov 稳定性理论与模态分解法,对系统的性能鲁棒性<sup>[56]</sup>进行研究,并且在[57]中讨论 Delta 算子鲁棒特征结构配置问题,给出了系统鲁棒稳定的充分条件. 文[58]将鲁棒性分析的矩阵测度方法推广到了时变不确定系统. 另外,文[59]利用频域方法分析鲁棒稳定性, Tesfaye 和 Tomizuka 考虑鲁棒数字跟踪控制<sup>[60]</sup>,基于时间延迟控制(TDC)算法给出了系统摄动的估计. 此外,文献[61]建立了连续和离散  $H_\infty$  控制的联系,借助于 Delta 算子描述,可以统一处理连续系统与离散系统的控制问题. 有关 Delta 算子的 LQG/LTR<sup>[62]</sup>设计和 LQR<sup>[2,63]</sup>的研究亦有部分结果.

## 7 数字滤波器实现

任何数字滤波器和控制器都是在有限字长的计算机中实现的. 一般情形下,有限字长会使系统的品质下降,甚至使系统失去稳定性;有限字长还引入非线性,从而导致极限环振荡和死带. Middleton 和 Goodwin 的分析表明<sup>[1]</sup>,Delta 算子实现方法具有较好的系数表达精度和较小的舍入截尾误差. 陈宗基、高金源和张建贵<sup>[64]</sup>证明了在有限字长相同的条件下,Delta 算子

实现方法产生极限环振荡的可能性小于  $q$  算子实现方法. 文[65]给出了使噪声最小化的采样周期选择方法. 文[66]通过引入绝对灵敏度与相对灵敏度的概念, 对移位算子和 Delta 算子参数化的有限字长效应进行研究, 得到较好结果. Middleton 在[67]中详细论述了 Delta 算子系统设计时需要考虑的实际问题、约束条件与局限性, 为控制系统设计提供了指南. 有关数字滤波器实现的其它问题参见[68].

## 8 结 论

本文对 Delta 算子在控制理论与信号处理中的应用做了较为全面的综述和总结.

反馈控制设计的 Delta 算子理论, 现已成为当前控制界的一个前沿研究课题. 其研究内容已涉及到控制、估计和信号处理的许多领域. Delta 算子是一种统一的描述方法, 可以将连续时间系统和离散时间系统的许多结果纳入到 Delta 算子系统的统一框架. 另外 Delta 算子理论的研究方法跟以往多数情形不同, 它是先从  $\delta$  离散域开始, 然后再将结果直接推广到采样周期为零的连续域中.

尽管 Delta 变换可以将  $Z$  变换和 Laplace 变换统一起来, 并且可以互相转换, 但是它们的适用场合有所区别. Laplace 变换适于连续情形; Delta 变换更适用于高速采样情形;  $Z$  变换则适用于低速采样情形.

本文的研究表明, 以下几点将会成为 Delta 算子方法今后的发展方向.

- 1) 基于 Delta 算子的结构辨识和同时估计问题、鲁棒辨识与鲁棒滤波理论研究.
- 2) 基于 Delta 算子的鲁棒控制和混合  $H_2/H_\infty$  控制以及  $H_\infty$  控制中的 LMI 方法研究.
- 3) 基于 Delta 算子的信号处理快速算法及 2D 信号处理技术研究.

## 参 考 文 献

- 1 Middleton, R. H. and Goodwin, G. C. . Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1986, AC-31(11):1015-1021
- 2 Middleton, R. H. and Goodwin, G. C. . Digital control and estimation; a unified approach. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990
- 3 Goodwin, G. C. , Middleton, R. H. and Poor, H. V. . High-speed digital signal processing and control. Proc. IEEE, 1992, 80(2): 240-259
- 4 Astrom, K. J. , Hagander, P. and Sternby, J. . Zeros of sampled systems. Automatica, 1984, 20(1): 31-38
- 5 Salgado, M. , Middleton, R. H. and Goodwin, G. C. . Connection between continuous and discrete Riccati equations with applications to Kalman filtering. IEE Proc. -D, 1988, 135(1): 28-34
- 6 Vijayan, R. et al. . A Levinson-type algorithm for modelling fast sampled data. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1991, AC-36(3): 314-321
- 7 Goodwin, G. C. and Middleton, R. H. . Continuous and discrete adaptive control. Control and Dynamic Systems, vol. 25, (C. T. Leondes, Ed). NY: Academic Press, 1987
- 8 Jabbari, F. . Lattice filter for RLS estimation of a delta operator based model. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1991, AC-36(7): 869-875
- 9 Neumann, R. . Delta-operator generalized predictive control. Proc. 31st IEEE Conf. Deci. Contr. , 1992, 2224-2225
- 10 Soh, C. B. . Robust stability of discrete-time systems using delta operators. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1991, AC-36(3): 377-380
- 11 Neuman, C. P. . Transformations between delta and forward shift operator transfer function models. IEEE Trans. Syst. Man. Cybe. , 1993, SMC-23(1): 295-296
- 12 Shor, M. H. and Perkins, W. R. . Reliable control in the presence of sensor/actuator failures; a unified discrete/continu-

- ous approach. Proc. 30th IEEE Conf. Deci. Contr., 1991, 1601—1606
- 13 Goodwin, G. C. et al. Rapprochement between continuous and discrete model reference adaptive control. *Automatica*, 1986, 22(2): 199—207
  - 14 李渭华, 萧德云, 方崇智. 基于  $\delta$  算子的格形故障检测滤波器. *自动化学报*, 1994, 20(4): 413—418
  - 15 Shor, M. H., Perkins, W. R. and Medanic, J. V. Design of reliable decentralized controllers: a unified continuous/discrete formulation. *Int. J. Control*, 1992, 56(4): 943—965
  - 16 Tesfaye, A. and Tomizuka, M. Sliding control of discretized continuous systems via the Euler operator. Proc. 32nd IEEE Conf. Deci. Contr., 1993, 871—876
  - 17 Premaratne, K. and Boujarwah, A. S. An algorithm for stability determination of two-dimensional delta operator formulated discrete-time systems. *Multidimens. Syst. Signal Process.*, 1995, 6(4): 287—312
  - 18 Jezek, J. Conversion of the polynomial continuous-time model to the delta discrete-time and vice versa. Proc. 11th IFAC World Congress, 1990, 1: 271—275
  - 19 Hersh, M. A. The zeros and poles of delta operator systems. *Int. J. Control*, 1993, 57(3): 557—575
  - 20 Mori, T. et al. A class of discrete time models for a continuous time system. *IEE Proc. -D*, 1989, 136(2): 79—83
  - 21 Hori, N., Mori, T. and Nikiforuk, P. N. A new perspective for discrete-time models of a continuous time system. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, AC-37(7): 1013—1017
  - 22 Stoten, D. P. and Harrison, A. J. L. Generation of discrete and continuous time transfer function coefficients. *Int. J. Control*, 1994, 59(5): 1159—1172
  - 23 Premaratne, K. and Jury, E. I. Tabular method for determining root distribution of delta-operator formulated real polynomials. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1994, AC-39(2): 352—355
  - 24 Premaratne, K. and Jury, E. I. Application of polynomial array method to discrete-time system stability. *IEE Proc. -D*, 1993, 140(3): 198—204
  - 25 邹云, 杨成梧, 翟长连. 线性定常系统的  $\delta$  算子描述—能控性与能稳性. *控制理论与应用*, 1996, 13(4): 527—531
  - 26 Hori, N., Cormier, Jr. R. and Kanai, K. On matched pole-zero discrete-time models. *IEE Proc. -D*, 1992, 139(3): 273—278
  - 27 Palaniswami, M. and Feng, G. Digital estimation and control with a new discrete time operator. Proc. 30th IEEE Conf. Deci. Contr., 1991, 1631—1632
  - 28 Mukhopadhyay, S., Patra, A. and Rao, G. P. New class of discrete-time models for continuous time systems. *Int. J. Control*, 1992, 55(5): 1161—1187
  - 29 Kwon, W. H., Moon, Y. S. and Ahn, S. C. Bounds in algebraic Riccati and Lyapunov equations: a survey and some new results. *Int. J. Control*, 1996, 64(3): 377—389
  - 30 张瑞金, 杨成梧. 离散代数 Riccati 方程解的上下界研究. *信息与控制*, 1998, 27(1): 23—25
  - 31 Mrabti, M. and Benseddik, M. Bounds for the eigenvalues of the solution of the unified algebraic Riccati matrix equation. *Syst. & Control Lett.*, 1995, 24(5): 345—349
  - 32 Mrabti, M. and Hmamed, A. Bounds for the solution of the Lyapunov matrix equation—A unified approach. *Syst. & Control Lett.*, 1992, 18: 73—81
  - 33 Mrabti, M. and Benseddik, M. Unified type non-stationary Lyapunov matrix equation—Simultaneous eigenvalue bounds. *Syst. & Control Lett.*, 1995, 24, (1): 53—59
  - 34 Mori, T. and Troch, L. Delta domain Lyapunov matrix equation—a link between continuous and discrete equations. *IEICE Fundamentals*, 1992, E75-A(3): 451—454
  - 35 Fan, H. and Liu, X. Delta Levinson and Schur-type RLS algorithms for adaptive signal processing. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1994, SP-42(7): 1629—1639
  - 36 Li, Q., Fan, H. and Karlsson, E. A delta MYWE algorithm for parameter estimation for noisy AR processes. *IEEE Trans. Signal Processing*, 1996, SP-44(5): 1300—1303
  - 37 Terrett, P. and Downing, C. J. Parameter estimation on a fixed-point processor using the  $\delta$ -operator. *Trans. Inst. Meas. Contr.*, 1994, 16(3): 163—172
  - 38 Wahlberg, B. The effects of rapid sampling in system identification. *Automatica*, 1990, 26(1): 167—170

- 39 Wilkinson, A. J. et al. . The application of recursive identification based on delta operators. Proc. Int. Conf. Control, 1991, 627—631
- 40 Benson, R. W. , Bobrow, J. E. and Jabbari, F. . Experiments in system identification and pole zero placement control using delta formulations. Proc. 29th IEEE Conf. Deci. Contr. , 1990, 991—993
- 41 Goodwin, G. C. . Some observations on robust stochastic estimation. IFAC Symp. on Ident. and Syst. Parameter Estimat. , 1988, 22—32
- 42 Jabbari, F. . Lattice implementation of the instrumental variable method; shift and delta operator formulations. Proc. American Contr. Conf. , 1991, 196—197
- 43 Niu, S. , Fisher, D. G. and Xiao, D. . An augmented UD identification algorithm. Int. J. Control, 1992, 56(1): 193—211
- 44 Janecki, D. . Model reference adaptive control using delta operator. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1988, AC-33(8): 771—774
- 45 Gawthrop, P. J. . Hybrid self-tuning control. IEE Proc. -D, 1980, 127(5): 229—236
- 46 Hori, N. et al. . Simplified adaptive control of an electrohydraulic servo system. IEE Proc. -D, 1990, 137(2): 107—111
- 47 Hori, N. , Kanai, K. and Nikiforuk, P. N. . Robustly stable discrete-time adaptive flight control using the Euler operator, Proc. 11th IFAC World Congress, 1990, 3: 75—80
- 48 Neumann, R. et al. . Application of delta-operator generalized predictive control. Proc. 32nd IEEE Conf. Deci. Contr. , 1993, 2499—2504
- 49 Rostgaard, M. , Lauritsen, M. B. and Poulsen, N. K. . A state-space approach to the emulator-based GPC design. Syst. & Control Lett. 1996, 28(5): 291—301
- 50 Bleile, T. et al. . Delta-operator general predictive control with multiple reference models. Proc. 33rd IEEE Conf. Deci. Contr. , 1994, 3030—3031
- 51 Doyle, J. C. et al. . State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems. IEEE Trans. Automat. Contr. , 1989, AC-34(8): 831—847
- 52 Iwasaki, T. and Skelton, R. E. . All controllers for the general  $H_\infty$  control problem; LMI existence conditions and state space formulas. Automatica, 1994, 30(8): 1307—1317
- 53 Soh, C. B. . Robust discrete time systems using delta operator. Int. J. Control, 1991, 54(2): 453—464
- 54 Mansour, M. et al. . On robust stability of discrete time systems using delta-operator. Proc. American Contr. Conf. , 1992, 1417—1418
- 55 Piou, J. E. et al. . Robustness of delta operator systems using a matrix measure approach. Proc. 32nd IEEE Conf. Deci. Contr. , 1993, 1789—1790
- 56 Piou, J. E. and Sobel, K. M. . A time approach to performance robustness of sampled data systems using the delta operator. Proc. 31st IEEE Conf. Deci. Contr. , 1992, 1968—1969
- 57 Piou, J. E. and Sobel, K. M. . Robust sampled data eigenstructure assignment using the delta operator. J. Guid. , Control, Dyn. , 1993, 16(4): 702—711
- 58 Molchanov, A. P. and Bauer, P. H. . Robust stability of time-varying delta-operator formulated discrete-time systems. 1996 IEEE Int. Symp. Cirt. & Syst. , 1996, 2: 521—523
- 59 Katbab, A. , Jury, E. I. and Premaratne, K. . Robust stability of delta-operator discrete-time systems using frequency-domain graphical approach. Proc. 34th IEEE Conf. Deci. Contr. , 1995, 774—779
- 60 Tesfaye, A. and Tomizuka, M. . Robust digital tracking with perturbation estimation via the Euler operator. Int. J. Control, 1996, 63(2): 239—256
- 61 Lee, L. H. , Goodwin, G. C. and Kolodziej, W. . Interconnections between continuous and discrete games with applications to  $H_\infty$  . Proc. 29th IEEE Conf. Deci. Contr. , 1990, 2425—2430
- 62 Tadjine, M. , Msaad, M. and Dugard, L. . An overview on the LQG/LTR method using the delta operator. Proc. 31st IEEE Conf. Deci. Contr. , 1992, 3728—3733
- 63 张平, 张立军, 高金源, 费玉华.  $\delta$  算子的 LQR 设计. 信息与控制, 1996, 25(2): 88—93
- 64 陈宗基, 高金源, 张建贵. Z 变换和  $\Delta$  变换的有限字长研究. 自动化学报, 1992, 18(6): 662—669
- 65 Kauraniemi, J. et al. . Roundoff noise minimization in a direct form delta operator structure. 1996 IEEE Conf. Acoust.

- Speech Signal Process., 1996, 3: 1371—1374
- 66 Li, G. and Gevers, M.. Comparative study of finite wordlength effects in shift and delta operator parameterizations. Proc. 29th IEEE Conf. Deci. Contr., 1990, 954—959
- 67 Middleton, R. H.. Trade-offs in linear control system design. Automatica, 1991, 27(2): 281—292
- 68 Li, G. and Gevers, M.. Roundoff noise minimization using delta-operator realizations. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, SP-41(2): 629—637

## Delta-Operator Theory for Feedback Control System —A Survey

ZHANG Duanjin and YANG Chengwu

(School of Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology • Nanjing, 210094, PRC)

**Abstract:** In this paper, a tutorial introduction to the delta operator theory for feedback control system is provided, which plays the important role in high speed signal processing and digital control systems. Delta operator is used as a framework to unify the continuous-time and discrete-time system theories such as system identification and state estimation, adaptive control and predictive control, robust control and  $H_\infty$  control. Realization of digital filter is also discussed and the important topics for the further study based on delta operator are pointed out.

**Key words:** discrete time system; sampled data system; delta operator; computer control

### 本文作者简介

**张端金** 1966年生. 1986年毕业于东北大学自动控制系, 1988年在哈尔滨工程大学获硕士学位, 现为南京理工大学博士研究生. 主要研究方向为计算机控制, 鲁棒控制和信号处理.

**杨成梧** 1936年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院, 现为南京理工大学教授, 博士生导师. 主要研究方向为2D系统, 广义系统, 高速采样控制,  $H_\infty$ 控制和离散事件动态系统.