第 15 卷第 2 期
1998 年 4 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 2
Apr., 1998

一种格状分区模型的研究

张 青 金以慧
(清华大学热能系·北京,100084) (清华大学自动化系·北京,100084)

摘要:本文提出一种新的分区模型结构并给出辨识算法.与此同类型的其它模型结构相比,该模型算法简洁,占用内存少,鲁棒性好,并具有与输入分量尺度无关性和很好的收敛性.

关键词:分区模型;格状分区;递推分区;样本不均衡

1 引 言

在系统辨识中,由于先验的解析形式的模型结构往往不能得到,或对象具有结构不确定性,因而非解析模型的辨识方法日益得到重视.人工神经元网络方法(ANN)之所以引起人们的极大兴趣,原因之一,就是其具有对任意非线性函数的良好逼近能力而无需先验的解析模型.但是从辨识的速度来说,ANN 的收敛速度极慢,不能进行实时学习.从辨识的准确性来说,存在样本的不均衡问题,即:当输入空间中不同区域中的样本数目差异较大时,样本多的区域中的信息就有淹没样本少的区域中的信息的趋势.与此同时,基于输入空间分区的非参数模型日益得到重视.这类方法的实质是将全局上的复杂性转化为局部上的简单性,从而从根本上避免了样本不均衡问题.文献[1]将 ANN 方法与分区思想结合,一定程度地提高了收敛速度,但是必须按照不同的映射规律事先对输入空间进行分区,这在大多数情况下是不现实的.文献[2]、[3]采用模糊理论的思想,可以保证拟合函数的连续性,但隶属度函数的选择有很大的随意性,自然也就难以保证精确性.文献[4]、[5]讨论了递推分区回归(Recursive Partition Regression,RPR)方法,RPR 方法非常简单但逼近的精度不能令人满意.Frieman 于 1991 年提出了多变量自适应样条回归模型(Multivariate Adaptive Regression Splines,MARS)[4],采用复杂的分区,变量筛选和多项式逼近等方法,以获得较高的精确度.但这种方法对样本的要求太高,也不适用于具有结构不确定性的对象.本文提出一种新的模型结构及辨识算法,力图做到精确性、简洁性和鲁棒性(对样本的分布、噪声而言)的统一.

2 格状分区模型的结构

设待辨识系统的输入输出关系为 $y = f(x), x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in G, x_i \in \mathbb{R}^i = [x_i^{\min}, x_i^{\max}], i = 1, 2\cdots, n$.

1) 输入空间分区.

对输入空间在每个分量 $\mathbb{R}^i$ 上进行划分,这样在欧氏空间中产生许多超长方体 $G_i, i = 1, 2\cdots$.本文将 G_i 称为子域,将 G 称为全域.G_i 的顶点可称之为"网格点",每个 G_i 有 $a = 2^n$ 个网格点.如图 1 所示.

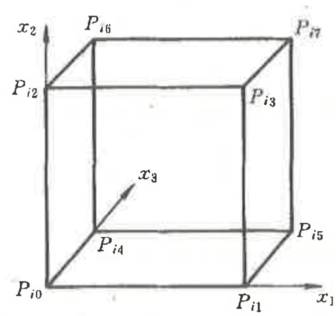

图 1 子域和网格点

2) 模型参数的选择及存储.

本文选择网格点所对应的函数值为模型参数.由于网格点的空

本文于 1995 年 7 月 7 日收到.1996 年 6 月 7 日收到修改稿.

间结构与 n 维数组是一致的,因此可以用一个 n 维数组 $Y[][]\cdots[]$ 将每个模型参数存入相应的位置,x 坐标值隐含在地址中,从而大大节省了内存.

3) 子域的搜索.

对于输入 $\boldsymbol{x}$,搜索其所在的子域 G_i. 对于基于输入空间分区的模型来说,子域的搜索一般都必须经过逐一匹配,成为制约模型输出速度的"瓶颈". 本文的模型由于格状分区简单有序,因而可通过简单的代数式计算一次确定子域.

4) 子域映射.

假定 $\boldsymbol{x}$ 所在的子域是 G_i,用 G_i 的网格点所对应的函数值 $\hat{f}(\boldsymbol{P}_{i0}),\hat{f}(\boldsymbol{P}_{i1}),\cdots,\hat{f}(\boldsymbol{P}_{i,a-1})$ 构成 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ 去近似 $f(x)$. 本文假定子域内近似为线性映射,令

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_i, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{a}_i=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$,上式可写成

$$\phi_i(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad 1]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ c_i\end{bmatrix} = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{P}_{i0}^{\mathrm{T}} \quad 1]\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ c_i'\end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中 $c_i'=c_i+\boldsymbol{P}_{i0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i$,为了求出 $\boldsymbol{a}_i,c_i'$,将 $\boldsymbol{P}_{i0},\boldsymbol{P}_{i1},\cdots,\boldsymbol{P}_{i,a-1}$ 代入(2)式,令 $\boldsymbol{P}_{ij}'=\boldsymbol{P}_{ij}'-\boldsymbol{P}_{i0}$,$j=0,1,2,\cdots,a-1$,则写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{i0}'^{\mathrm{T}} & 1\\ \boldsymbol{P}_{i1}'^{\mathrm{T}} & 1\\ \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{P}_{i,a-1}'^{\mathrm{T}} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ c_i'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{f}(\boldsymbol{P}_{i0})\\ \hat{f}(\boldsymbol{P}_{i1})\\ \vdots\\ \hat{f}(\boldsymbol{P}_{i,a-1})\end{bmatrix}. \tag{3}$$

若令 l_{ij} 为 G_i 在 x_j 方向上的边长,$\boldsymbol{L}_i=\mathrm{diag}[l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{in}]$,则有 $\boldsymbol{P}_{ij}'=\boldsymbol{L}_i[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$,其中 j 的二进制表示是 $b_nb_{n-1}\cdots b_1$.

(3)式左边写成

$$\boldsymbol{Q}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_i & \\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ c_i'\end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{L}_i'\boldsymbol{a}_i' = \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{a}_i'',$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_1 = \left[\begin{array}{c:c} & 1\\ \boldsymbol{Q} & \vdots\\ & 1\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \text{(}\boldsymbol{Q}\text{ 的第 } j \text{ 行对应于 } j \text{ 的二进制表示)},$$

$$\boldsymbol{L}_i' = \begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_i & \\ & 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i' = \begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_i\\ c_i'\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i'' = \boldsymbol{L}_i'\boldsymbol{a}_i'.$$

容易证明,$\boldsymbol{Q}_1$ 为列满秩矩阵,因此(3)式关于 $\boldsymbol{a}_i''$ 有最小二乘解,令 $\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}$,(3)式右边为 $\boldsymbol{F}$,有:$\hat{\boldsymbol{a}}_i''=(\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1)^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{ZF}$,$\hat{\boldsymbol{a}}_i'=\boldsymbol{L'}_i^{-1}\boldsymbol{ZF}$. 因此,$\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x})=[(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{P}_{i0}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{L}_i^{-1},1]\boldsymbol{ZF}$. 可以看出矩阵 Z 只与 n 有关,初始化时计算一次即可,$\boldsymbol{L}_i$ 是对角阵,因此 $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{x})_i$ 的计算非常简洁.

3　参数辨识

本文提出梯度下降法和递推分区法两种算法,前者是一个独立的算法,后者则是建立在前

者基础上的发展.

1）梯度下降法.

对于样本集合$\{\boldsymbol{x}_k | k \in H\}$，定义性能指标 $J = \sum_{K \in H} \frac{1}{2}(y_k - \hat{f}(\boldsymbol{x}_k))^2$. 令 $\theta_i = \hat{f}(\boldsymbol{P}_i)$，则参数辨识就变成求解满足 $\min J$ 的参数集合$\{\theta_i | i=1,2\cdots\}$. 因此对于所有的参数，按如下方式校正 $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k - \beta \frac{\partial J}{\partial \theta_i}$，其中 β 为修正步长. 可以证明 $\frac{\partial^2 J}{\partial \theta_i^2} > 0$，因此用上述的梯度下降法可以收敛到全局最小点.

2）递推分区法.

假如 $\mathbb{R}^i$ 空间分区成 k_i 个小空间$(i=1,2,\cdots,n)$，称此为对输入空间进行了 $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$ 分区. 递推分区就是对输入空间进行一系列分区方式所组成的系列. 例如：欲辨识两个输入变量的映射 $f(x_1,x_2)$，选最终分区为 2×2，如图 2 所示，假定 G_1,G_2,G_3 中均有样本，G_4 中无样本. 样本集合为 Q. 递推分区法步骤如下：

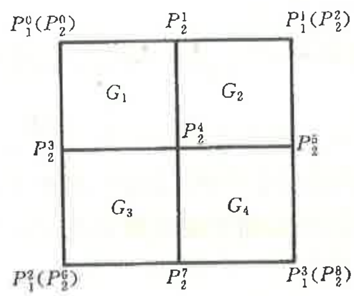

图 2　递推分区法原理

1° 进行初始分区(1×1)，在样本集 Q 上反复学习至收敛，求出参数 $\hat{f}(P_1^0),\hat{f}(P_1^1),\hat{f}(P_1^2),\hat{f}(P_1^3)$，以此构造整个输入空间上的映射(下称全域映射)$\hat{f}_1(\boldsymbol{x})$.

2° 进行下一级(2×2)分区，得网格点 $P_2^0,P_2^1,\cdots,P_2^8$，求出 $\hat{f}_1(P_2^0),\hat{f}_1(P_2^1),\cdots,\hat{f}_1(P_2^8)$.

3° 以 $\hat{f}_1(P_2^0),\hat{f}_1(P_2^1),\cdots,\hat{f}_1(P_2^8)$ 为初始值，在样本集 Q 上反复学习至收敛，获得 $\hat{f}_2(P_2^0)$，$\hat{f}_2(P_2^1),\cdots,\hat{f}_2(P_2^8)$. 以此构成全域映射 $\hat{f}_2(\boldsymbol{x})$.

如果直接进行分区，由于 G_4 中无样本，$\hat{f}(P_2^8)$ 的值无从获得，只有在 2×2 分区时，借助于 G_1,G_2,G_3 中样本的信息才能求出 $\hat{f}(P_1^3)$ 即 $\hat{f}(P_2^8)$.

在其它各种分区模型中几乎都涉及"距离"的计算，辨识的结果与各分量的尺度有关，本文的辨识算法不涉及距离，所以与各分量的尺度无关.

4　仿真结果

文献[3]给出一个待辨识系统 $y=(1+x_1^{0.5}+x_2^{-1}+x_3^{-1.5})^2$ 及 40 个样本，按照 $2\times 2\times 2$ 的分区方式进行辨识，几项指标对比如表 1(性能指标的定义参见文献[3]). 可以看到，作为综合指标的 C，本文方法优于文献[3]的三种方法.

表 1　各种方法的性能指标比较

	Type Ⅰ	Type Ⅱ	Type Ⅲ	本文方法
E_A	9.39	1.08	7.10	0.505
E_B	5.72	1.23	5.09	0.533
UC	7.78	13.92	8.99	7.23
C	18.78	15.55	17.73	7.96

5　结　论

与各种分区模型相比，本文方法算法简单，占用内存少，收敛性好，与各输入分量的尺度无关，并且对于样本有较好的鲁棒性.

参 考 文 献

1 Anand, R., Mehrotra, K. G., Mohan, C. K. and Member S. R.. An improved algorithm for neural network classification of imbalanced training sets. IEEE Trans. on networks, 1993, 4(6): 962－969

2 Jang. J. S.. Fuzzy modeling using generalized neural networks and Kalman filter algorithm. Proc. 9th National Conf. Artificial Intellingence. 1991, 762－767

3 Horikawa, S. Funchashi, T., and Uchikawa, Y.. On fuzzy modeling using fuzzy neural networks with the back-propagation algorithm. IEEE Trans. on Neural Networks, 1992, 3(5): 801－806

4 Frieman, J. H.. Multivariate adaptive regression splines. The Ann. Statist, 1993, 19(8): 1－141

5 Veaux, R. D. De, Psichogios, D. C. and Ungar, L. H.. A Comparison of two nonparametric estimation schemes: MARS and neural networks. Computers Chem. Engng. 1993, 17(8): 819－839

Study of a Kind of Partition Model

ZHANG Qing

(Department of Thermal Energy, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

JIN Yihui

(Department of Thermal Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: In this paper, a kind of partition model structure and its identification algorithm is presented. Compared with other structures of this group, this model has many good qualities such as simple algorithm, small consuming memory, good robustness and convergence. Furthermore, the identification result is irrelavent to the scales of each input variables.

Key words: partition model; grid partition; iterative partition; imbalanced training sets

本文作者简介

张　青　1967 年生. 1989 年获清华大学过程控制专业学士学位, 1994 年获清华大学自动控制理论及应用专业硕士学位. 现攻读清华大学热能工程专业博士学位. 目前感兴趣的方向有: 系统辨识, 自动控制, 火电站的仿真等.

金以慧　1936 年生. 1959 年毕业于清华大学动力机械系, 1963 年清华大学热工量测及自动化专业研究生毕业. 现为清华大学教授. 博士生导师, 长期从事自动控制理论及应用, 生产过程控制等方面的教学科研工作. 近年来在国内外发表论文近 50 篇, 主编《信息、控制与系统》系列教材之一《过程控制》. 曾赴波兰讲学, 近期研究方向是高等过程控制, 工业系统模型化和综合自动化系统.