第15卷第3期
1998年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 3
Jun., 1998

非线性系统鲁棒控制器设计的研究*

岳　东　许世范　　　　刘永清
（中国矿业大学信电学院·徐州，221008）（华南理工大学自动控制工程系·广州，510641）

摘要：本文首先指出[1]中证明的不足，进一步在补充假设下，对一类含非匹配不确定项的系统设计出新的鲁棒控制器。仿真结果表明，此控制器能保证闭环系统具有理想品质。

关键词：非线性系统；鲁棒控制；稳定性；一致有界

1　引　言

对非线性系统，当系统不确定项满足匹配条件时，人们给出了保证闭环最终有界的鲁棒控制器[2,3]．[4]中利用滑动模控制理论，设计了保证闭环系统渐近稳定的不连续控制器．

近年来，人们研究了当系统中出现非匹配不确定项时的情形，给出了相应的鲁棒控制器设计方法[1,5~7]．然而，[6][7]中设计的控制器仅能保证闭环系统解的最终有界性．在[5]的基础上，[1]研究了一类更加广泛的不确定系统．但不尽人意的是，[1]中的证明过程有误．因此，从理论上讲，其所提方法是不能成立的．

本文在补充假设下，给出一较[1]中更加简单的控制．分析与仿真表明，此控制器对[1]中所考虑的不确定项具有良好的抵消作用．

2　准备工作

考虑如下系统

$$\dot{x}(t) = f(x,t) + \xi(x,t) + B(x,t)[\rho(x,t) + u]. \tag{1}$$

这里 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是控制向量，$f(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上连续且对 t 一致有界．$\xi(x,t),\rho(x,t)$ 分别表示不确定量．

给出若干假设

假设1　$B(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 中是连续可微的．

假设2　$\xi(x,t),\rho(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 中连续且关于 t 一致有界，存在 $\alpha(x,t) \geqslant 0,\beta(x,t) \geqslant 0$ 使得

$$\|\xi(x,t)\| \leqslant \alpha(x,t), \quad \|\rho(x,t)\| \leqslant \beta(x,t).$$

假设3　系统(1)的标称部分，即 $\dot{x}(t) = f(x,t)$，关于 $x=0$ 是渐近稳定的，且存在李亚普诺夫函数 $V(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 和连续、严格增函数 $\gamma_i(\cdot):\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，$i=1,2$ 及连续、正定函数 $\gamma_3(\cdot):\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，满足

i)　$\gamma_i(0) = 0,\quad i=1,2,3;\quad \lim\limits_{s\to\infty}\gamma_i(s) = +\infty,\quad i=1,2;$

ii)　$\gamma_1(\|x\|) \leqslant V(x,t) \leqslant \gamma_2(\|x\|);$

iii)　$\dfrac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t) f(x,t) \leqslant -\gamma_3(\|x\|),$

其中 $\nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ 上连续可微且对 t 一致有界．

* 国家自然科学基金与博士后基金资助项目(69574009)．

本文于1996年1月2日收到，1997年1月3日收到修改稿．

假设 4 定义

$$W=\{(x,t)\mid(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)=0\},$$

对 $\forall\ (x,t)\in W$,有 $\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)=0$.

注 1 这里给出的假设 2～4 与[1]中相同,只是这里附加了假设 1.而在实际系统中,假设 1 的要求是合理的.

注 2 对 $V(x,t)$ 沿(1)的解关于 t 求导得

$$\begin{aligned}&\dot V(x,t)\\ &=\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)f(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)[\rho(x,t)+u]\\ &\leqslant-\gamma_3(\|x\|)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)\rho(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)u.\end{aligned}$$

为抵消扰动项 $\xi(x,t),\rho(x,t)$ 的影响,[1]中分别设计了控制

$$u'=\begin{cases}-\dfrac{\|\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\|\alpha(x,t)}{\|B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t)\|}B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t), & \text{当 } B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t)\geqslant\varepsilon_1,\\ -\dfrac{\|\nabla_x^{\mathrm{T}}(x,t)\|\alpha(x,t)}{\varepsilon_1}B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t), & \text{当 } B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t)<\varepsilon_1,\end{cases}\tag{2}$$

及

$$\bar u=\begin{cases}-\dfrac{\mu(x,t)}{\|\mu(x,t)\|}\beta(x,t), & \text{当 } \|\mu(x,t)\|\geqslant\varepsilon_2,\\ -\dfrac{\mu(x,t)}{\varepsilon_2}\beta(x,t), & \text{当 } \|\mu(x,t)\|<\varepsilon_2.\end{cases}\tag{3}$$

这里 $\mu(x,t)\triangleq B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_xV(x,t)\beta(x,t)$.利用 u' 与 $\bar u$ 构造 $u=u'+\bar u$ 为系统(1)的镇定控制.在证明定理过程中,[1] 曾利用了文中的(3.5)式,即

$$\begin{aligned}&\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)u'\\ &\leqslant\begin{cases}0, & \text{当 } \|B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\|\geqslant\varepsilon_1,\\ \|\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)\|, & \text{当 } \|B^{\mathrm{T}}(x,t)\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\|<\varepsilon_1.\end{cases}\end{aligned}\tag{4}$$

下面我们举例说明(4)式不是恒成立的.

考虑例子

$$\begin{bmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0.1\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha x_2\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u.\tag{5}$$

这里 $|\alpha|\leqslant1,\alpha\geqslant0$.

构造 Lyapunov 函数 $V=\dfrac{(x_1^2+x_2^2)}{2}$,显然 V 满足[1]中假设 2.另外,$\xi(x,t)=\begin{bmatrix}\alpha x_2\\ 0\end{bmatrix}$满足[1]中假设 1.因为 $\nabla_x^{\mathrm{T}}V=[x_1\quad x_2]$,$\nabla_x^{\mathrm{T}}V\xi(x,t)=\alpha x_1x_2$,因此[1]中假设 3 也满足.

按[1]中(3.2)构造控制 u' 为

$$u'=\begin{cases}-x_2\sqrt{x_1^2+x_2^2}, & |x_2|\geqslant\varepsilon_1,\\ -\dfrac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\,|x_2|}{\varepsilon_1}x_2, & |x_2|<\varepsilon_1,\end{cases}$$

从而

$$\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)\xi(x,t)+\nabla_x^{\mathrm{T}}V(x,t)B(x,t)u'$$

$$
= \begin{cases} \alpha x_1 x_2 - x_2^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, & |x_2| \geqslant \varepsilon_1, \\ \alpha x_1 x_2 - \dfrac{|x_2|^3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\varepsilon_1}, & |x_2| < \varepsilon_1. \end{cases} \tag{6}
$$

显然，当 $|x_2| < \varepsilon_1$ 时(4)式成立. 然而，当 $|x_2| \geqslant \varepsilon_1$ 时，若 $x_1 x_2 > 0$，欲得

$$
\alpha x_1 x_2 - x_2^2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqslant 0,
$$

必须 $\alpha^2 x_1^2 x_2^2 \leqslant x_2^4 (x_1^2 + x_2^2)$，从而必须

$$
\alpha^2 x_1^2 \leqslant x_2^2 (x_1^2 + x_2^2).
$$

由上式可知，x_2^2 应满足

$$
x_2^2 > \frac{-x_1^2 + \sqrt{x_1^4 + 4\alpha^2 x_1^2}}{2}. \tag{7}
$$

但是，当 $x_2 = 0.5, x_1 = 2, \alpha = 1$ 时(7)式不成立，因此(4)式不成立. 由此可见，(4)式并非恒成立，只有当 x_1 与 x_2 满足一定关系时才有可能成立.

综上可知，[1]中理论不成立.

3 主要结果

本节在假设 1～4 下，提出一个鲁棒控制器. 该控制器相对(2)和(3)要简单，且可以保证闭环系统的全局渐近稳定.

由假设 4 知，当 (x,t) 满足 $\nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t) B(x,t) = 0$ 时，$\nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t) \xi(x,t) = 0$. 也即，若令超平面

$$
s(x,t) = \nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t) B(x,t), \tag{8}
$$

则在超平面 $s(x,t) = 0$ 上有 $\nabla_x^{\mathrm{T}} V(x,t) \xi(x,t) = 0$. 因此，我们只须设计一个控制 u，它可以保证在一有限时间里系统解 x 到达 $s(x,t) = 0$ 且不再离开.

构造 Lyapunov 函数

$$
W(x,t) = \frac{s^{\mathrm{T}}(x,t) s(x,t)}{2}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\dot{W}(x,t) &= s^{\mathrm{T}}(x,t)\Big[\frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x}\dot{x}\Big] \\
&= s^{\mathrm{T}}(x,t)\Big\{\frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x}\xi(x,t) + \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} B(x,t)[u + \rho(x,t)]\Big\} \\
&\leqslant \Big\{\Big\|\frac{\partial s(x,t)}{\partial t}\Big\| + \Big\|\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} f(x,t)\Big\| + \Big\|\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}\Big\| \alpha(x,t)\Big\}|s| \\
&\quad + s^{\mathrm{T}}(x,t)\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} B(x,t)[u + \rho(x,t)].
\end{aligned}
$$

这里 $|s| = |s_1| + \cdots + |s_m|$.

若进一步设 $\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial x} B(x,t)$ 在任一有界域内可逆，设计控制 u 为

$$
u = \Big[\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} B(x,t)\Big]^{-1} \delta(x,t) \operatorname{sgn}(s(x,t)). \tag{9}
$$

这里 $\delta(x,t) \geqslant \Big\|\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial t}\Big\| + \Big\|\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial x} f(x,t)\Big\| + \Big\|\dfrac{\partial s(x,t)}{\partial t}\Big\| \alpha(x,t) + \delta_0$. 则有

$$
\dot{W}(x,t) \leqslant -\delta_0 |s(x,t)|.
$$

因此知，系统(1)的解 x 定于有限时间到达 $s(x,t)=0$.

若将 sgn $(s(x,t))$ 改为饱和型函数

$$\mathrm{sat}(s(x,t))=\begin{cases}\dfrac{2s(x,t)}{\varepsilon}, & \|s(x,t)\|\leqslant\varepsilon/2,\\ \mathrm{sgn}(s(x,t)), & \|s(x,t)\|>\varepsilon/2,\end{cases}\tag{10}$$

则由熟知的方法可证，存在 $T>0$，当 $t\geqslant T$ 时，

$$\|s(x,t)\|\leqslant\varepsilon.$$

而

$$\begin{aligned}\dot V(x,t)\leqslant&-\gamma_3(\|x\|)+\nabla_x^{\mathrm T}V(x,t)\xi(x,t)+\|\nabla_x^{\mathrm T}V(x,t)B(x,t)\|[\beta(x,t)\\&+\|[\frac{\partial s(x,t)}{\partial x}B(x,t)]^{-1}\|\delta(x,t)]\\ \triangleq&-\gamma_3(\|x\|)+\nabla_x^{\mathrm T}V(x,t)\xi(x,t)+\|\nabla_x^{\mathrm T}V(x,t)B(x,t)\|\delta_0(x,t).\end{aligned}$$

定义

$$\hat r(\varepsilon)=\sup_{(x,t)\in\overline W(\varepsilon)}\{\|\nabla_x^{\mathrm T}V(x,t)\xi(x,t)\|\},\quad \bar r(\varepsilon)=\sup_{(x,t)\in\overline W(\varepsilon)}\delta_0(x,t).$$

其中 $\overline W(\varepsilon)=\{(x,t)\}\|\|B^{\mathrm T}(x,t)\nabla_xV(x,t)\|\leqslant\varepsilon,x\in H\}$，$H$ 是 $\mathbb R^n$ 中以原点为中心的一足够大闭球. 则有

$$\dot V(x,t)\leqslant-\gamma_3(\|x\|)+\hat r(\varepsilon)+\varepsilon\bar r(\varepsilon),\quad t\geqslant T.\tag{11}$$

显然，$\hat r(\cdot)$，$\bar r(\cdot)$ 均为增函数，因此 $\bar r_0=\varepsilon\bar r(\varepsilon)$ 也为增函数，且 $\hat r(0)=0$，$\bar r_0(0)=0$.

由(11)，进一步利用[1]中调节参数 ε 的方法适当调节 ε，控制(10)可保证闭环系统解渐近收敛于一指定闭球，具体步骤略.

4 例 子

仍考虑系统(5)，只是这里控制的设计按(9)或(10)给出，仿真图(图1)是在控制(9)作用下的动态响应曲线.

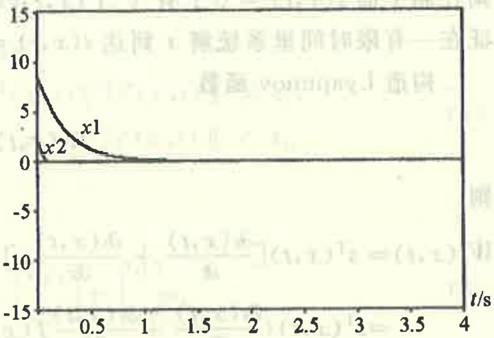

图1 控制(9)作用下的动态响应曲线

5 结 论

本文研究了具非匹配不确定项的非线性系统的鲁棒控制问题. 分析与仿真表明，[1]中控制综合理论不可靠，而且控制设计复杂. 在本文第3节中，我们给出一新的鲁棒控制设计方法，仿真结果表明，本文结果非常有效.

参 考 文 献

1 叶旭东，蒋静坪. 含一类未匹配不确定量的非线性系统鲁棒调节器设计. 控制理论与应用，1995，12(3)：316－320

2 Bramish. B. R. ，et al.. A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems. SIAM J. of Control and Optimization，1983，21(3)：510－525

3 Martin，Coless. Control of uncertain nonlinear systems. Trans. of the ASME，1993，115(1)：362－373

4 Utkin，V. I.. Sliding Modes in Control and Optimization. New York：Springer-Verlag，1992

5 Qu，Z.. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainty. Systems and Control Letter，1992，18(2)：301－307

6 Chen，Y. H.. On the robustness of mismatched uncertain dynamical systems. Trans. ASME J. Dynamic Systems Measure-

ment Control,1987,109(1):29－35

7 Chen,Y. H. and Leitmann,G.. Robustness of uncertain systems in the absence of matching condition. Int. J. Control, 1987,45(5):1527－1542

Study of Design of Robust Control for Nonlinear Systems

YUE Dong and XU Shifan

(College of Information and Electrical Engineering,

China University of Mining and Technology · Jiangsu Xuzhou,221008,PRC)

LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engineering,South China University of Technology · Guangzhou,510641,PRC)

Abstract: The errors in the proof of [1] are first pointed out in this paper. Further,under the additional assumption,a novel robust control is designed for the systems with mismatched uncertainties. Simulation results show that the given conrtol can guarantee the desired properties of closed loop system.

Key words: nonlinear systems; robust control; stability; uniform boundedness

本文作者简介

岳　东　1964 年生.副教授,1995 年于华南理工大学获博士学位,1995 年至 1997 年在中国矿业大学电工站做博士后研究.研究兴趣为不确定系统的鲁棒控制,非线性控制,CIMS 在煤矿中的应用.

许世范　1931 年生.现任中国煤炭学会煤矿自动化专业委员会主任,中国矿业大学教授,博士生导师.长期从事控制理论与应用和煤矿自动化的研究工作.

刘永清　见本刊 1998 年第 1 期第 124 页.