第 15 卷第 3 期
1998 年 6 月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 15, No. 3
Jun., 1998

一类非线性系统的观测器设计

马克茂　王子才　史小平
(哈尔滨工业大学仿真中心·哈尔滨,150001)

摘要:本文针对一类广泛存在的非线性系统,给出了状态观测器的形式,证明了观测器误差渐进收敛的条件,并利用线性系统的特征结构配置理论,给出了简便而切实可行的观测器的设计方法.

关键词:非线性系统;观测器;特征结构配置

1　引　　言

状态反馈广泛应用于非线性系统的设计之中,这就使得观测器的设计成为非线性系统控制理论中一个十分重要的环节.

自从 Luenberger 关于观测器理论的讨论[1],线性系统的观测器设计及应用已日趋成熟,非线性系统的观测器问题也得到了广泛的讨论[2~5].但由于非线性系统本身的复杂性,这一问题还远未得到解决,往往需要针对不同的对象,采用不同的设计方法,如通过非线性坐标变换来设计指数可观型的观测器,或化为观测规范型来设计,对系统有着较为苛刻的要求[4],不能适用于一般的非线性系统.

本文讨论一类满足 Lipschitz 条件的本质非线性系统,在机械或机器人系统等中许多非线性系统都满足这一条件,最近,[2]、[5]等文献中都有过相关的讨论,本文给出了此类观测器的新的设计方法.

2　非线性系统及观测器

考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = Ax + g(t,u,y) + f(t,u,x), \tag{1}$$

$$y = Cx. \tag{2}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态,$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$,$y \in \mathbb{R}^m$ 为系统的量测输出,$u \in \mathbb{R}^p$ 为系统的输入,$g(\cdot,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$,$f(\cdot,\cdot,\cdot):\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为非线性映射,且 $f(t,u,x)$ 满足如下的 Lipschitz 条件:

$$\| f(t,u,x_1) - f(t,u,x_2) \| < r \| x_1 - x_2 \|, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^p, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{3}$$

其中 r 为 Lipschitz 常数.同时,假设$[A \quad C]$可观.

对于系统(1)(2),建立如下观测器

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + g(t,u,y) + f(t,u,\tilde{x}) + L(y - C\tilde{x}). \tag{4}$$

其中 $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ 为观测变量,$L \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 为增益矩阵,定义 $z = x - \tilde{x}$,则可得

$$\dot{z} = (A - LC)z + f(t,u,x) - f(t,u,\tilde{x}). \tag{5}$$

观测器设计问题即为:选取适当的反馈阵 L,使(5)式渐进稳定,即保证如下关系:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0. \tag{6}$$

本文于 1995 年 12 月 26 日收到.1997 年 10 月 20 日收到修改稿.

引理 1 对于函数 $h(t)>0$,常数 a,c,λ, 如果

$$h(t)\leqslant ce^{\lambda t}+\int_0^t ae^{\lambda(t-\tau)}h(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{7}$$

那么

$$h(t)\leqslant ce^{(\lambda+a)t}. \tag{8}$$

证 (7)式两边同乘 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$, 利用 Bellman-Gronwell 不等式[6],可得(8)式.

为方便起见,不失一般性,假设 $A_C=A-LC$ 具有非亏损结构,并且 $\lambda_i(A_C)<0, i=1,2,\cdots,n$,则存在 $V\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$\det V\neq 0$,使得

$$VA_CV^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda. \tag{9}$$

令 $\lambda=\max\limits_i\lambda_i$, 则可得如下观测器收敛条件:

定理 2 对于满足条件(3)的系统(1),(2)及其观测器(4),如果

$$\lambda+\|V\|\cdot\|V^{-1}\|\cdot r<0, \tag{10}$$

则(6)式成立.

证 由(5)式得

$$z(t)=\mathrm{e}^{A_Ct}z(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{A_C(t-\tau)}[f(\tau,u,x(\tau))-f(\tau,u,\tilde{x}(\tau))]\mathrm{d}\tau, \tag{11}$$

由(9)式可得

$$\mathrm{e}^{A_Ct}=V^{-1}\mathrm{e}^{\Lambda t}V. \tag{12}$$

将上式代入(11)式,

$$Vz(t)=\mathrm{e}^{\Lambda t}Vz(0)+\int_0^t\mathrm{e}^{\Lambda(t-\tau)}V(f(\tau,u,x)-f(\tau,u,\tilde{x}))\mathrm{d}\tau, \tag{13}$$

上式两边取范数,可得不等式

$$\|Vz(t)\|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda t}\|Vz(0)\|+\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}r\|V\|\cdot\|z(\tau)\|\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

又由于

$$\|z(\tau)\|=\|V^{-1}Vz(\tau)\|\leqslant\|V^{-1}\|\cdot\|Vz(\tau)\|, \tag{15}$$

故下述不等式成立

$$\|Vz(t)\|\leqslant\mathrm{e}^{\lambda t}\|Vz(0)\|+\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda(t-\tau)}r\|V\|\cdot\|V^{-1}\|\cdot\|Vz(\tau)\|\mathrm{d}\tau. \tag{16}$$

由引理 1 及(10),(16)式可得

$$\lim_{t\to\infty}\|Vz(t)\|=0, \tag{17}$$

即(6)式成立. 证毕.

从以上定理可以看出,观测器收敛的条件可归结为 A_C 阵的特征向量矩阵 V 及其逆 V^{-1} 的范数条件. 这样,如果能够得到矩阵 V 的参数化表示,就可以通过优化的方法,来确定满足(10)式的矩阵 V,而这正是下一部分要做的工作. 优化问题现已有比较成熟的软件来实现[7].

3 观测器设计

对于能观对$[A\quad C]$, 存在如下右互质分解:

$$(sI-A^{\mathrm{T}})^{-1}C^{\mathrm{T}}=N(s)D^{-1}(s), \tag{18}$$

同时,由于 $\mathrm{rank}\,[sI-A^{\mathrm{T}}\quad C^{\mathrm{T}}]=n$,故存在一定阶数的初等变换矩阵 $P(s),Q(s)$,使得

$$P(s)[A^{\mathrm{T}}-sI\quad C^{\mathrm{T}}]Q(s)=[0\quad I], \tag{19}$$

满足(18)式的 $N(s),D(s)$ 可由 $Q(s)$ 中求得:

$$Q(s)=\begin{bmatrix}N(s) & \tilde{Q}(s)\\ D(s) & \end{bmatrix}. \tag{20}$$

由于只需进行(19)式所示的初等变换，故 $N(s)$，$D(s)$ 的求取十分简便.

取 n 个互异的 $\lambda_i\in\mathbb{C}$，$\mathrm{Re}\lambda_i<0$，$i=1,2,\cdots,n$. 若 λ_i 带有虚部，应共轭出现. 令

$$v_i=N(\lambda_i)f_i, \tag{21}$$

$$w_i=D(\lambda_i)f_i, \tag{22}$$

$$V=[v_1\ v_2\ \cdots\ v_n], \tag{23}$$

$$W=[w_1\quad w_2\quad \cdots\quad w_n], \tag{24}$$

其中 $f_i\in\mathbb{C}^m$ 为自由参变量，满足如下约束

C1) $\lambda_i=\bar{\lambda}_j$ 时，$f_i=\bar{f}_j$；

C2) $\det V\neq 0$.

利用线性系统的特征结构配置理论[8~10]，可得

定理 3 取

$$L=-V^{-T}W^{T}, \tag{25}$$

$$A_C=A-LC. \tag{26}$$

其中 W,V 的选取如(21)～(24)所示，$V,f_i,i=1,2,\cdots,n$ 满足约束 C1)，C2)，则

$$VA_CV^{-1}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n). \tag{27}$$

由于 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$ 互异，故 A_C 具对角标准型. 从定理 3 中可以看出，当 V 满足 C2) 时，V 成为 A_C 阵以 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$ 为特征值的特征向量矩阵，而约束C1) 是为了保证由(25)式所得的 L 为实矩阵，本文中选取 $\lambda_i\in\mathbb{R}^-$，此约束条件自然得到满足. 按如上方法选取 L，则在完成 A_C 阵极点配置的同时，给出了特征向量矩阵 V 的全参数化表示，并且这些参数给出了特征结构配置的全部自由度[8]. 这样，$\|V\|$ 和 $\|V^{-1}\|$ 成为 λ_i,f_i 的函数，通过求解如下优化问题

$$\min J(\lambda_i,f_i)=\min((\max_i\lambda_i)+r\cdot\|V\|\cdot\|V^{-1}\|)$$

来寻找满足式的矩阵 V. 实际上，上述优化问题不必进行到底，只需指标 J 小于 0 即可结束寻优过程. [2]中给出了另一种判别方法.

4 算　例

下面给出一个简单的例子，来说明本文所给方法的各步骤.

考虑具有如下参数的非线性系统

$$A=\begin{bmatrix}-6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix},\quad C=[0\quad 1],\quad f=\begin{bmatrix}0\\ 1.5\sin x_1\end{bmatrix},\quad g=\begin{bmatrix}-y^2u\\ 0\end{bmatrix},$$

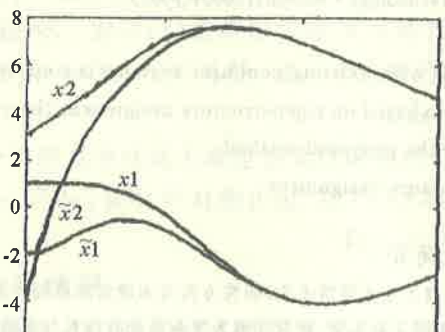

图 1　状态及观测结果

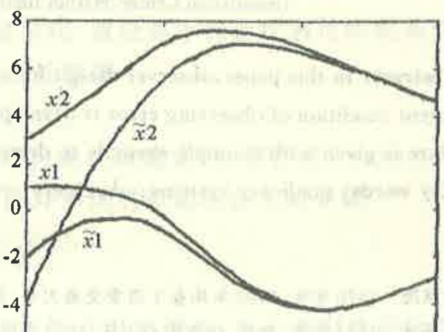

图 2　文[2]中方法所得结果

首先求得
$$N(x)=\begin{bmatrix}1\\ \dfrac{s+6}{3}\end{bmatrix},\quad D(s)=\frac{s^2+5s-12}{3},$$

则
$$V=\begin{bmatrix}f_1 & f_2\\ \dfrac{\lambda_1+6}{3}f_1 & \dfrac{\lambda_2+6}{3}f_2\end{bmatrix},$$

取 $f_1=f_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=-9$，经简单计算知条件(10)满足．依文中方法，可得 $L=\begin{bmatrix}-1\\7\end{bmatrix}$.

利用以上所得 L，进行了数值仿真．取输入 $u=\sin(t)$，仿真初值取为 $x_2(0)=3$，$x_2(0)=3$，$\widetilde{x}_1(0)=-2$，$\widetilde{x}_2(0)=-4$．仿真结果示于图1．针对以上系统，取 $\epsilon=0.1$，采用[2]中的方法，仿真结果示于图2.

参 考 文 献

1 Luenberger, D. G.. An introduction to observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, AC-16(1): 190—197

2 Raghavan, S., et al.. Observer design of a class of nonlinear systems. Int. J. Control, 1994, 59(2): 515—528

3 Hunt, L. R., et al.. Observers for nonlinear systems in steady state. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(10): 2113—2118

4 李春文等．多变量非线性控制的逆系统方法．北京：清华大学出版社，1994

5 Yaz, E.. Stabilizing compensator design for uncertain nonlinear systems. Systems and Control Letters, 1993, 21(1): 11—17

6 Vidyasagar, M.. Nonlinear Systems Analysis. America: Prentice-Hall, 1978

7 夏念凌．最优化问题的计算机实用算法．北京：水利电力出版社，1990

8 Duan, G. R.. Solutions to matrix equation $AV+BW=VF$ and their application to eigenstructure assignment in linear systems. IEEE Trans. Automat, Contr., 1993, AC-38(2): 276—280

9 段广仁等．时变线性系统的特征结构配置问题．中国科学(A辑)，1990(7): 769—776

10 段广仁等．线性系统状态反馈特征结构配置．自动化学报，1990，16(6): 556—568

Observer Design for a Class of Nonlinear Systems

MA Kemao, WANG Zicai and SHI Xiaoping

(Simulation Center, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: In this paper, observer design for a class of wide-existing nonlinear systems is considered. The convergent condition of observing error is developed. Then, based on eigenstructure assignment theory, design procedure is given with a simple example to demonstrate the proposed method.

Key words: nonlinear systems; observers; eigenstructure assignment

本文作者简介

马克茂 1970年生．1992年毕业于西安交通大学，现为哈尔滨工业大学博士生．研究方向为不确定系统的控制．

王子才 1933年生．教授，仿真中心主任．1958年毕业于哈尔滨工业大学．研究领域为复杂系统的仿真与建模．

史小平 1965年生．副研究员．1988年毕业于哈尔滨工业大学，1995年获博士学位．研究方向为不确定系统的控制，复杂系统的建模．