第 15 卷第 3 期
1998 年 6 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 3
Jun., 1998

带有时变不确定性的线性系统族的同时镇定

胡文远
(北京航空航天大学自动控制系·北京,100083)

段广仁
(哈尔滨工业大学控制工程系·哈尔滨,150001)

摘要：本文考虑了具有时变不确定性的线性系统族的状态反馈同时二次镇定问题. 这个问题能更全面地刻划系统的不确定性. 并将其转化为求多个 Lyapunov 方程的同一解的问题. 最后给出一个数值算例.

关键词：同时镇定；鲁棒控制；不确定系统；匹配条件；Lyapunov 方程

1 引 言

线性系统族的同时镇定问题是鲁棒控制领域中的一个重要问题[1]. 在容错控制系统设计和非线性系统的线性化设计等方面有着重要的应用价值. 而系统族的二次镇定问题属于同时镇定问题的一个分支. 我们知道一个系统族的二次镇定问题可以转化为其凸顶点的二次镇定问题[2]. 如果能用有限的凸顶点的凸组合来刻划一个系统族，那么只须考虑在这几个凸顶点上的系统的同时二次镇定即可[3]. 但是仅仅用凸顶点的凸组合来刻划一个系统族往往不能全面地反映系统的不确定性. 对于一些有时变不确定性的系统，用凸顶点的凸组合无法处理. 在实际问题中可能会出现这样的情况，用凸顶点的凸组合来描述一个系统族，而在每个凸顶点上的系统还存在着时变的不确定性[4]. 因此，对于这种具有时变不确定性的系统族的同时镇定问题的研究具有重要的意义. 本文将考虑这个问题并给出算法.

2 问题的描述

考虑如下 N 个线性不确定系统

$$\dot{x}(t) = [A_i + \Delta A(r(t))]x(t) + [B_i + \Delta B(s(t))]u(t), \quad i = 1,\cdots,N. \tag{1}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量，$u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制向量，不确定性向量 $r(t) \in \varphi$ 和 $s(t) \in \Psi$，其中 $\varphi \subset \mathbb{R}^k$ 和 $\Psi \subset \mathbb{R}^l$ 为 Lebesgue 可测的有界紧集. 矩阵 A_i 为第 i 个系统的标称系统矩阵. 假设不确定性满足匹配条件，即存在矩阵 $D(r) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $E(s) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 使

$$\begin{cases}\Delta A(r) = BD(r), \quad \Delta B(s) = BE(s), \\ E(s) + E^{\mathrm{T}}(s) + 2I \geqslant \delta I, \quad i = 1,\cdots,N.\end{cases} \tag{2}$$

其中 δ 为一正常数，则系统族(1)的同时二次镇定问题可描述如下.

问题 SS 对于(1)式所定义的 N 个线性不确定系统，假设其不确定性满足匹配条件(2)，且 (A_i, B), $i = 1,\cdots,N$ 可控. 求一个定常的状态反馈控制律

$$u(t) = Kx(t), \tag{3}$$

使 N 个闭环系统在其不确定性允许的变化范围 φ, Ψ 内是二次稳定的. 即存在 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$，其中 P 对称正定. 且 $V(x)$ 在 N 个闭环系统的运动轨迹上的导数

$$L(x,t) = \dot{V}(x) < 0. \tag{4}$$

3 主要结果

定理 1 在(1)式定义的 N 个线性不确定系统中，假设 B 列满秩，且不确定性满足匹配条件(2). 定义线性空间 $N(B^{\mathrm{T}}) = \{x \in \mathbb{R}^n : B^{\mathrm{T}}x = 0\}$. 令 Θ 为任意 $n \times (n-m)$ 左单位矩阵，其

本文于 1996 年 2 月 5 日收到. 1996 年 11 月 6 日收到修改稿.

列形成空间 $N(B^{\mathrm{T}})$ 的基. 即有 $B^{\mathrm{T}}\Theta=0$ 和 $\Theta^{\mathrm{T}}\Theta=I$. 则这 N 个系统可同时二次镇定的充要条件是存在对称正定矩阵 S 满足

$$\Theta^{\mathrm{T}}[A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}]\Theta<0,\quad i=1,\cdots,N. \tag{5}$$

而且,如果以上不等式成立,则 $V(x)=x^{\mathrm{T}}S^{-1}x$ 为这 N 个闭环系统的共同的 Lyapunov 函数.

证 必要性. 假设存在状态反馈阵 K 使 N 个闭环系统二次稳定. 设共同的 Lyapunov 函数为 $V(x)=x^{\mathrm{T}}Px$. P 为对称正定矩阵. 则其沿第 i 个闭环系统的轨迹的导数

$$\begin{aligned}L_i(x,t)&=\dot V(x)=x^{\mathrm{T}}(A_{ci}^{\mathrm{T}}P+PA_{ci})x\\&=x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+(D+(E+I)K)^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+PB(D+(E+I)K))x<0,\end{aligned}$$

其中

$$A_{ci}=A_i+BK.$$

令

$$F=D+(E+I)K,$$

即

$$A_i^{\mathrm{T}}P+PA_i+F^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P+PBF<0,$$

两边左、右乘 S 得

$$A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}+SF^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+BFS<0,$$

两边左乘 Θ^{T},右乘 Θ 得

$$\Theta^{\mathrm{T}}[A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}]\Theta<0,\quad i=1,\cdots,N.$$

上式中利用到 $B^{\mathrm{T}}\Theta=0$.

充分性. 充分性的证明是构造性的. 假设存在对称正定阵 S 使(5)式成立. 取反馈阵 $K=-\gamma B^{\mathrm{T}}S^{-1}$. 其中 γ 待定. 设 Lyapunov 函数为 $V(x)=x^{\mathrm{T}}S^{-1}x$. 则其沿第 i 个闭环系统的轨迹的导数为

$$\begin{aligned}L_i(x,t)&=\dot V(x)=\dot x^{\mathrm{T}}S^{-1}x+x^{\mathrm{T}}S^{-1}\dot x\\&=x^{\mathrm{T}}(A_i^{\mathrm{T}}S^{-1}+S^{-1}A_i-\gamma S^{-1}B(E+E^{\mathrm{T}}+2I)B^{\mathrm{T}}S^{-1}+S^{-1}BD+D^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}S^{-1})x\\&\leqslant x^{\mathrm{T}}S^{-1}(A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}-\gamma\delta BB^{\mathrm{T}}+BDS+SD^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})S^{-1}x.\end{aligned}$$

因此只须证明存在 γ_i^* 使得

$$A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}-\gamma_i^*\delta BB^{\mathrm{T}}+BDS+SD^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}<0, \tag{6}$$

即可证明第 i 个闭环系统稳定. 由于 B 列满秩,因此,存在可逆矩阵 $T\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 使得

$$\tilde B=TB=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}.$$

令 $\tilde A_i=TA_iT^{-1}$,$\tilde S=TST^{\mathrm{T}}$,$\tilde\Theta=T^{-\mathrm{T}}\Theta$,则 $\tilde B^{\mathrm{T}}\tilde\Theta=0$ 和 $\tilde\Theta^{\mathrm{T}}\tilde\Theta=I$ 仍然成立,且由(5)式有

$$\tilde\Theta^{\mathrm{T}}[\tilde A_i\tilde S+\tilde S\tilde A_i^{\mathrm{T}}]\tilde\Theta<0,\quad i=1,\cdots,N.$$

也就是说,对系统(1)进行相似变换后,条件(5)仍然成立. 因此不失一般性,可以假设 $B=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$. 令

$$A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}=X_i=\begin{bmatrix}X_{i1}&X_{i2}\\X_{i2}^{\mathrm{T}}&X_{i3}\end{bmatrix},\quad DS=F=[F_1\quad F_2].$$

其中 $X_{i1}\in\mathbb{R}^{m\times m}$,$X_{i2}\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$,$X_{i3}\in\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$,$F_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$,$F_2\in\mathbb{R}^{m\times(n-m)}$,则

$$\begin{aligned}&A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}-\gamma_i^*\delta BB^{\mathrm{T}}+BDS+SD^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}\\&=X_i-\gamma_i^*\delta\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}[I\quad 0]+\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}[F_1\quad F_2]+\begin{bmatrix}F_1^{\mathrm{T}}\\F_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[I\quad 0]\\&=\begin{bmatrix}X_{i1}+F_1+F_1^{\mathrm{T}}-\gamma_i^*\delta I&X_{i2}+F_2\\X_{i2}^{\mathrm{T}}+F_2^{\mathrm{T}}&X_{i3}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7}$$

又当 $B=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$ 时，$\Theta=\begin{bmatrix}0\\I\end{bmatrix}$，由

$$\Theta^{\mathrm{T}}[A_iS+SA_i^{\mathrm{T}}]\Theta<0,$$

可知 $X_{i3}<0$. 因此，在(7)式中，当 γ_i^* 足够大时

$$\begin{bmatrix}X_{i1}+F_1+F_1^{\mathrm{T}}-\gamma_i^*\delta I & X_{i2}+F_2\\ X_{i2}^{\mathrm{T}}+F_2^{\mathrm{T}} & X_{i3}\end{bmatrix}<0.$$

故(6)式成立，即有 $$L_i(x,t)<0.$$

因此，第 i 个闭环系统二次稳定. 对每个系统求出相应的 γ_i^*. 则当取 $K=-\gamma B^{\mathrm{T}}S^{-1}$，$\gamma=\max(r_1^*,r_2^*,\cdots,r_N^*)$ 时，所有 N 个闭环系统都是二次稳定的，即 K 可二次镇定 N 个闭环系统.

证毕.

注 1　文[5]中的引理1给出了单个不确定线性系统可二次镇定的充要条件，这个引理可以看作是本文定理1在 $N=1$ 时的特殊情况.

注 2　由定理1可知，N 个系统的同时二次镇定问题的关键在于寻找一个对称正定矩阵 S 使(5)式成立. 这个问题可以转化为凸规划问题，并采用割平面法等凸规划方法来求解，可参见文[6].

综上所述，可以给出问题SS的如下解法.

步骤 1　对于给定的 N 个不确定系统(1)，利用凸规划算法求出一对称正定矩阵 S 使(5)式成立. 如果找不到，则结束；

步骤 2　对每个系统，根据其不确定性的大小，用(6)式求出其相应的 γ_i^*；

步骤 3　取 $\gamma\geqslant\max(r_1^*,r_2^*,\cdots,r_N^*)$. 则状态反馈阵 $K=-\gamma B^{\mathrm{T}}S^{-1}$ 为问题SS的解.

4 算　　例

考虑如下系统

$$\dot{x}(t)=[A_i+\Delta A(r(t))]x(t)+[B+\Delta B(s(t))]u(t),\quad i=1,2.$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad \Delta A=\begin{bmatrix}0&0\\r(t)&0\end{bmatrix},\quad \Delta B=\begin{bmatrix}0\\s(t)\end{bmatrix}.$$

其中 $$|r(t)|\leqslant 1,\quad |s(t)|\leqslant 0.5.$$

求一定常状态反馈控制律使两个闭环系统稳定.

这两个系统的不确定性满足匹配条件

$$\Delta A=BD,\quad \Delta B=BE,\quad E+E^{\mathrm{T}}+2\geqslant 1.$$

其中 $$D=[r(t)\quad 0],\quad E=s(t).$$

步骤 1　可以求出满足条件(5)的 S 为

$$S=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&6\end{bmatrix};$$

步骤 2　利用(6)式可以求出 $\gamma_1^*=19.25$，$\gamma_2^*=26.5$；

步骤 3　取 $\gamma=27>\max(\gamma_1^*,\gamma_2^*)$，则状态反馈阵

$$K=-\gamma B^{\mathrm{T}}S^{-1}=[-27\quad -13.5]$$

为所求问题的解.

5 结 论

目前，对于线性不确定系统的不确定性有两种定义方法[3]：一种是范数有界不确定性(Norm-bounded uncertainty)，例如用匹配条件来表示不确定性；另外一种是凸边界不确定性(Convex-bounded uncertainty)，即用系统族的凸顶点的凸组合来表示不确定系统. 本文提出的问题可以看成是上述两种定义方法的结合. 采用本文的方法扩大了系统所能允许的不确定性的范围，即不仅在由系统族的凸顶点所组成的凸多面体内的任一点是稳定的，而且还能允许满足匹配条件的不确定性 ΔA 和 ΔB .

参 考 文 献

1 Vidyasagar, M. and Viswanadham, N.. Algebraic design techniques for reliable stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, AC-27(5): 1085—1095

2 Duan, G. R. and Hu, W. Y.. A note on quadratic stability of matrix families. Journal of Harbin Institute of Technology, 1996, E-3(1): 26—28

3 Peres, P. L. D., Geromel, J. C. and Bernussou, J.. Quadratic stabilizability of linear uncertain systems in convex-bounded domains. Automatica, 1993, 29(2): 491—493

4 胡文远. 不确定线性系统及系统族的鲁棒镇定问题研究. 哈尔滨工业大学工学博士学位论文，哈尔滨，1997

5 Gu, X.. Stabilizability conditions of multivariable uncertain systems via output feedback control. IEEE Trans. Automat. Contr., 1990, AC-35(8): 925—927

6 Boyd, S. and Yang, Q.. Structured and simultaneously Lyapunov functions for system stability problems. Int. J. Control, 1989, 49(6): 2215—2240

Simultaneous Stabilization of Linear Systems with Time-Varying Uncertainties

HU Wenyuan

(Department of Control Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics · Beijing, 100083, PRC)

DUAN Guangren

(Department of Control Engineering, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: In this paper, the problem of simultaneous stabilization of linear systems with time-varying uncertainties is studied. It can describe the uncertainty of a system more completely. And this problem is converted to the problem of the simultaneous solution of Lyapunov equations. At last, a numerical example is given.

Key words: simultaneous stabilization; robust control; uncertain systems; matching conditions; Lyapunov equation

本文作者简介

胡文远 1969 年生. 1991 年毕业于清华大学机械工程系，同年考入哈尔滨工业大学控制工程系攻读硕士学位. 1997 年获自动控制专业博士学位，现在北京航空航天大学自动控制系博士后流动站工作. 主要研究方向是线性系统的鲁棒控制及其在航空、航天控制中的应用.

段广仁 1962 年生. 分别于 1983 年、1986 年和 1989 年获得学士、硕士和博士学位. 1991 年结束博士后科研工作. 现为哈尔滨工业大学控制工程系教授、IEEE 高级会员、中国自动化学会青年工作委员会委员. 主要研究方向是线性系统理论，鲁棒控制理论及其在航天控制中的应用等.