第 15 卷第 3 期　　控制理论与应用　　Vol. 15, No. 3
1998 年 6 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jun., 1998

具有动态不确定性的离散预测控制系统设计*

刘兵
(电力自动化研究院系统所·南京,210003)
冯纯伯　　薛禹胜
(东南大学自动化研究所·南京,210096)　(电力自动化研究院·南京,210003)

摘要：本文对具有未建模动态及噪声干扰的离散系统预测控制进行讨论.在保留广义预测控制(GPC)基本特点的条件下,提出包含 GPC 指标项、灵敏度函数的综合指标函数,使得闭环系统的鲁棒稳定性增强.

关键词：预测控制；谱分解；鲁棒设计

1 引　　言

近年来预测控制系统的鲁棒设计方法被引起广泛的关注[1,2,4,5].参考文[4,5],本文在预测控制系统设计时直接考虑噪声干扰和动态不确定性对系统的影响,增强了系统的鲁棒性.

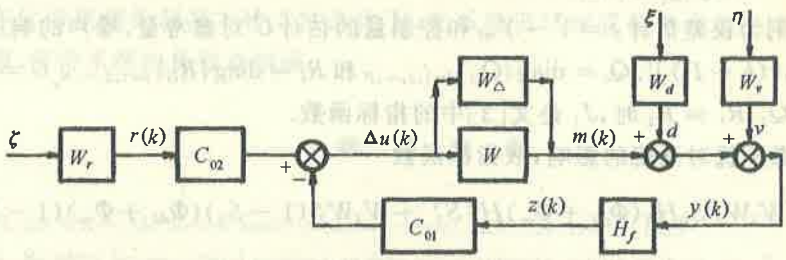

图 1 离散闭环控制系统

2 系统描述及预测估计

在不会混淆情况下,下面记 $f \triangleq f(z^{-1})$, $f^{*} \triangleq f^{\mathrm{T}}(z)$, $\Phi_{..}$ 表示相应的功率谱.在没有特殊说明的情况下,其它符号的意义参见文[4,5].

参考文[4,5],本文考虑如图 1 所示的控制系统,其中 ζ,ξ 为单位方差的白噪声,并且 ζ,ξ,η 相互独立. $W_r = E(z^{-1})/A_e(z^{-1})$, $W_d = C(z^{-1})/A(z^{-1})$, $W_v = z^{-1}D(z^{-1})/A(z^{-1})$ 分别为参考输入、干扰及可测噪声模型,并且 $E(z^{-1})$, $A_e(z^{-1})$ 稳定. $W = z^{-1}B(z^{-1})/A(z^{-1})$ 为系统模型, $H_f = z^{-k_0}$ 为测量延迟, C_{01} 和 C_{02} 为待定的控制器, $\Delta = 1 - z^{-1}$. W_Δ 为未建模动态,不失一般性,假设 $\|W_\Delta\|_\infty < 1$.

由图 1 得到等价的标称系统模型[4]

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + D_n(z^{-1})\varepsilon(k). \tag{1}$$

其中 $\varepsilon(k)$ 为单位方差白噪声, $D_n(z^{-1})$ 稳定并且满足 $D_nD_n^{*} = D\Phi_{\eta\eta}D^{*} + CC^{*}$, $\Phi_{d_vd_v} = \Phi_{dd} + \Phi_{vv}$, $d_v(k) = D_n(z^{-1})/A(z^{-1})\varepsilon(k)$.

参考文[3,4],有预测估计式(2)[3]和式(3)[4]

$$\hat{y}(k+i) = H_i\Delta\hat{u}(k+i-1) + F_{di}y(k) + G_{di}\Delta u(k-1),\quad i = 1,2,\cdots,P, \tag{2}$$

---

* 国家自然科学基金(69334010)和河南省教委自然科学基金资助项目.

本文于 1996 年 4 月 1 日收到. 1997 年 8 月 20 日收到修改稿.

$$\begin{cases}\hat{y}(k+i)=WS_iC_{i2}r(k+i)+S_iF_{di}d_v(k),\\ \Delta\hat{u}(k+i)=S_iC_{i2}r(k+i)-M_iF_{di}d_v(k),\end{cases}\quad i=0,1,\cdots,P. \tag{3}$$

其中 $F_{di}=F_i/D_n$, $G_{di}=G_i/D_n$，以及关系[3]: $D_n=AE_i+z^{-i}F_i$, $BE_i=D_nH_i+z^{-i}G_i$. C_{i1}, C_{i2} 为第 i 个闭环通道的控制器[4]，灵敏度 $S_i=(1+C_{i1}H_fW)^{-1}$，控制灵敏度 $M_i=C_{i1}H_fS_i$，补灵敏度 $1-S_i=M_iW$.

令 N_u 为控制时域[3]，$H_i=h_0+h_1z^{-1}+\cdots+h_{i-1}z^{-(i-1)}$. 定义：若 $i\leqslant N_u$ 则 $\overline{H}_i(z^{-1})=H_i$，否则 $\overline{H}_i(z^{-1})=h_{i-N_u}+h_{i-N_u+1}z^{-1}+\cdots+h_{i-1}z^{-(N_u-1)}$. 由式(2)和式(3)得式(4)

$$\hat{Y}=\hat{H}\hat{U}+\hat{F}_dd_v(k)+\hat{F}_rS_0C_{02}r(k),\quad \hat{U}=S_cr(k)-M_cd_v(k). \tag{4}$$

其中 $\hat{Y}=[\hat{y}(k+1),\hat{y}(k+2),\cdots,\hat{y}(k+P)]^{\mathrm{T}}$, $\hat{U}=[\Delta\hat{u}(k),\Delta\hat{u}(k+1),\cdots,\Delta\hat{u}(k+N_u-1)]^{\mathrm{T}}$. $\hat{H}=[H_x^{\mathrm{T}},H_z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $H_x=\mathrm{diag}\{\overline{H}_i\}_{i=1,\cdots,N_u}$. H_z 为 $(P-N_u)\times N_u$ 阵，第 N_u 列为 $[\overline{H}_{N_u+1},\cdots,\overline{H}_P]^{\mathrm{T}}$，其它元素为 0. $\hat{F}_r=[z^{-1}(G_{d1}+F_{d1}\dfrac{B}{A}),\cdots,z^{-1}(G_{dP}+F_{dP}\dfrac{B}{A})]^{\mathrm{T}}$, $\hat{F}_d=[F_{d1},\cdots,F_{dP}]^{\mathrm{T}}-\hat{F}_rM_0$. $S_c=[S_0C_{02},S_1C_{12}z,\cdots,S_{N_u-1}C_{(N_u-1)2}z^{N_u-1}]^{\mathrm{T}}$, $M_c=[M_0,M_1F_{d1},\cdots,M_{N_u-1}F_{d(N_u-1)}]^{\mathrm{T}}$.

3 预测控制算法

考虑预测控制的性能要求，取指标函数

$$J_1=\frac{1}{2\pi j}\sum_{i=1}^{2}\oint_{|z|=1}\{\mathrm{trace}(Q_i^*Q_i\Phi_{e_ie_i})+\mathrm{trace}(R_i^*R_i\Phi_{U_iU_i})\}\frac{\mathrm{d}z}{z}, \tag{5}$$

e_1, e_2 和 U_1, U_2 分别为误差估计 $\hat{e}=\hat{Y}-Y_{\mathrm{ref}}$ 和控制量的估计 $\hat{U}$ 对参考量、噪声的响应向量. $Y_{\mathrm{ref}}=[r(k+1),\cdots,r(k+P)]^{\mathrm{T}}$. $Q_i=\mathrm{diag}\{Q_{ij}\}_{j=1,2,\cdots,P}$ 和 $R_i=\mathrm{diag}\{R_{ij}\}_{j=1,2,\cdots,N_u}$ $(i=1,2)$ 为加权矩阵. 当 $Q_1=Q_2$, $R_1=R_2$ 时，J_1 是文[3]中的指标函数.

仿文[5]，考虑干扰对系统的影响，取指标函数

$$J_2=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}[W_1W_1^*S_0H_f(\Phi_{dd}+\Phi_{vv})H_f^*S_0^*+W_2W_2^*(1-S_0)(\Phi_{dd}+\Phi_{vv})(1-S_0^*)]\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{6}$$

不妨假设图 1 所示的标称闭环系统稳定(注：后面将证明). 由图 1 得 $\Delta u(k)=u_1(k)+u_2(k)$, $u_1(k)=S_0C_{02}r(k)$, $u_2(k)=-M_0(d(k)+v(k))$，并且 $\|u_2\|_2\leqslant\|M_0\|_\infty\|d+v\|_2$. 由小增益定理知闭环系统鲁棒稳定的充分条件为 $\|M_0\|_\infty<1$，因此可取适当小的正实数 α，对 $\|\dfrac{1}{\alpha}u_2\|_2$ 极小化. 此外，考虑到参考量对控制信号的影响，取指标函数

$$J_3=\mathrm{E}\{\|X_1u_1(k)\|_2^2+\|X_2\frac{1}{\alpha}u_2(k)\|_2^2\},$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1}(X_1X_1^*S_0C_{02}\Phi_{rr}C_{02}^*S_0^*+X_2X_2^*\frac{1}{\alpha^2}M_0\Phi_{d_vd_v}M_0^*)\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{7}$$

其中 X_1 和 X_2 为加权项.

综上所述，取综合指标函数

$$J=J_1+J_2+J_3. \tag{8}$$

定理 1 对图 1 所示的闭环系统，指标函数式(8)的极小化解使标称闭环系统内稳，适当选择参数可增强闭环系统的鲁棒稳定性，并且

$$C_{01}=\frac{C_{n1}}{C_{d1}}=\frac{K}{T}z^{k_0},\quad C_{02}=\frac{C_{n2}}{C_{d2}}=\frac{K_0D_nD_{c1}}{\alpha TD_{c2}E}z^P, \tag{9}$$

$$S_0=\frac{\alpha AT}{D_{c1}},\quad 1-S_0=\frac{\alpha z^{-1}BK}{D_{c1}},\quad M_0=\frac{\alpha AK}{D_{c1}}. \tag{10}$$

证 证明见附录.

4 举 例

考虑不稳定的非最小相位系统，$A(z^{-1}) = \Delta(1 - 4z^{-1} + 3.74z^{-2} - 2.22z^{-3})$，$B(z^{-1}) = 10(1 - 2z^{-1})(3 - z^{-1})$. $C(z^{-1}) = 1$，$D(z^{-1}) = 1$，ζ,ξ,η 为相互独立的单位方差的白噪声. 取 $P = 5$，$N_u = 3$，$A_w(z^{-1}) = 14z^{-2} + 41z^{-1} + 30$，$A_e(z^{-1}) = -z^{-1} + 2$，$E(z^{-1}) = 1$，$Q_{n11}(z^{-1}) = 0.4z^{-1} + 1$，$Q_{n12}(z^{-1}) = 0.4z^{-1} + 1$，$Q_{n13}(z^{-1}) = 0.2z^{-1} + 1$，$Q_{n14}(z^{-1}) = 0.2z^{-1} + 1$，$Q_{n15}(z^{-1}) = 0.1z^{-1} + 1$，$Q_{n21}(z^{-1}) = 6z^{-1} + 1$，$Q_{n22}(z^{-1}) = 7z^{-1} + 1$，$Q_{n23}(z^{-1}) = 0.2z^{-1} + 1$，$Q_{n24}(z^{-1}) = 0.2z^{-1} + 1$，$Q_{n25}(z^{-1}) = 0.1z^{-1} + 1$，$R_{n11}(z^{-1}) = 0.3z^{-1} + 1$，$R_{n21}(z^{-1}) = 30z^{-1} + 10$，$W_{n1}(z^{-1}) = z^{-1} + 2$，$W_{n2}(z^{-1}) = 2z^{-1} + 5$，$X_{n1}(z^{-1}) = 0.1z^{-1} + 1$，$X_{n2}(z^{-1}) = 33z^{-1} + 2$，$\alpha = 0.7$. 求得部分控制器参数为：$D_n(z^{-1}) = 1.4142$，$D_{c1}(z^{-1}) = 2.5z^{-7} - 22.3z^{-6} + 61.1z^{-5} - 440.8z^{-4} - 2629z^{-3} + 7594.8z^{-2} - 9471.7z^{-1} + 5128.1$，$K(z^{-1}) = -196.07z^{-3} + 459.44z^{-2} - 527.91z^{-1} + 262.95$. 由图 1 得 $m(k)$ 和 $\Delta u(k)$ 对噪声 $d(k) + v(k)$ 的稳态响应分别为 $m_d(\infty) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})BKD_n \in (z^{-1})/(D_{c1}A) = -0.135687 \in (1)$，$\Delta u_d(\infty) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})AKD_n \in (z^{-1})/(D_{c1}A) = 0$，$\| M_0 \|_\infty = \alpha \| AK/D_{c1} \|_\infty = 0.9134$.

因此闭环系统鲁棒稳定，并且系统在一定程度上抑制了噪声对系统的影响.

5 结 论

本文在保留预测控制基本特点的条件下，在系统设计时直接考虑动态不确定性和噪声对系统的影响，使得系统的鲁棒性增强.

参 考 文 献

1 Campo, P. J. and Morari, M.. Robust model predictive control. ACC, 1987, 1021－1026

2 Tadmor, G.. Receding horizon control revisited: an easy way to robustly stablize an ltv system. Systems and Control Letters, 1992, 18(1): 285－294

3 Clarke, D. W., Mohtadi, C. and Tuffs, P. S.. Generalized predictive control, part 1: the basic algorithm. Automatica, 1987, 23(2): 137－160

4 Grimble, M. J.. Two-degree-of-freedom linear quadratic Gaussian predictive control. IEE, Pt-D, 1995, 142(4): 295－306

5 刘兵，冯纯伯. 基于双重准则的二自由度预测控制：连续情况. 自动化学报，1998，24(3)

附 录

定理 1 的证明. 预测控制的基本特点是滚动优化，即只有当前的控制量用于实现，因此下面只求解 C_{01} 和 C_{02}. 令 $Q_{ij} = Q_{nij}/A_w (j = 1,2,\cdots,P)$，$R_{i1} = R_{ni1}/A_w$，$X_i = X_{ni}/A_w (i = 1,2)$，$W_1 = W_{n1}/A_w$，$W_2 = AW_{n2}/A_w$，$A_w$ 稳定. 将式(8)中各项展开，把不含 C_{i1} 和 $C_{i2} (i = 1,2,\cdots,N_u - 1)$ 而含 C_{01} 和 C_{02} 的项分离出来，整理得

$$J_0 = \oint_{|z|=1}\Big[\Big(\frac{1}{\alpha}Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\phi_1 Y_f^{*-1}\Big)\Big(\frac{1}{\alpha}Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\phi_1 Y_f^{*-1}\Big)^* + (Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\phi_2 Y_r^{*-1})(Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\phi_2 Y_r^{*-1})^* + \phi_0\Big]\frac{\mathrm{d}z}{z}, \tag{A1}$$

$$Y_{c1} = \frac{D_{c1}}{A_wAD_n},\quad Y_{c2} = \frac{D_{c2}}{A_wAD_n},\quad Y_f^*Y_f = \frac{D_n^*D_n}{A^*A},\quad Y_rY_r^* = \frac{EE^*}{A_eA_e^*}, \tag{A2}$$

$$\phi_1 = \alpha\Big[Q_{21}^*Q_{21}F_{d1}H_1^* + \sum_{i=1}^{P}Q_{2i}^*Q_{2i}F_{di}\Phi_{d_vd_v}z\Big(G_{di} + F_{di}\frac{B}{A}\Big)^* + W_1^*W_1W^*\Big]\Phi_{d_vd_v}, \tag{A3}$$

$$\phi_2 = \Big[Q_{11}^*Q_{11}zH_1^* + \sum_{i=1}^{P}Q_{1i}^*Q_{1i}z^{i+1}\Big(G_{di} + F_{di}\frac{B}{A}\Big)^*\Big]\Phi_{rr}, \tag{A4}$$

ϕ_0 与控制器无关. 取 $Y_f = D_n/A, Y_r = Ez^{-P}/A_e$. D_{c1} 和 D_{c2} 稳定并且满足如下谱分解

$$D_{c1}^{*}D_{c1} = \alpha^2\Big[Q_{n21}^{*}Q_{n21}D_m + \sum_{i=1}^{P}Q_{n2i}^{*}Q_{n2i}(AG_i + BF_i)(G_iA + F_iB)^{*} + R_{n21}^{*}R_{n21}A^{*}AD_n^{*}D_n + (W_{n1}^{*}W_{n1} + W_{n2}^{*}W_{n2}A^{*}A)B^{*}BD_n^{*}D_n\Big] + X_{n2}^{*}X_{n2}(AD_n)(AD_n)^{*}, \tag{A5}$$

$$D_{c2}^{*}D_{c2} = Q_{n11}^{*}Q_{n11}D_m + \sum_{i=1}^{P}Q_{n1i}^{*}Q_{n1i}(AG_i + BF_i)(G_iA + F_iB)^{*} + R_{n11}^{*}R_{n11}A^{*}AD_n^{*}D_n + X_{n1}^{*}X_{n1}(AD_n)(AD_n)^{*}, \tag{A6}$$

$$D_m = H_1H_1^{*}A^{*}AD_n^{*}D_n + H_1z(AG_1 + BF_1)^{*}AD_n + z^{-1}(AG_1 + BF_1)H_1^{*}A^{*}D_n^{*}. \tag{A7}$$

为进一步简化式(A1)的右边,构造如下丢番图方程

$$D_{c1}^{*}z^{-g}K + L(A_wA) = \alpha\Big[Q_{n21}^{*}Q_{n21}H_1^{*}D_n^{*}A^{*}F_1 + \sum_{i=1}^{P}Q_{n2i}^{*}Q_{n2i}z(G_iA + F_iB)^{*}F_i + W_{n1}^{*}W_{n1}zB^{*}D_n^{*}D_n\Big]z^{-g}, \tag{A8}$$

$$D_{c1}^{*}z^{-g}T - L(z^{-1}A_wB) = \alpha\Big[Q_{n21}^{*}Q_{n21}H_1^{*}H_1A^{*}D_n^{*}D_n + Q_{n21}^{*}Q_{n21}H_1z(G_1A + F_1B)^{*}D_n + Q_{n21}^{*}Q_{n21}z^{-1}G_1H_1^{*}A^{*}D_n^{*} + \sum_{i=1}^{P}Q_{n2i}^{*}Q_{n2i}G_i(G_iA + F_iB)^{*} + R_{n21}^{*}R_{n21}A^{*}D_n^{*}D_n + W_{n2}^{*}W_{n2}A^{*}B^{*}BD_n^{*}D_n + \frac{1}{\alpha^2}X_{n2}^{*}X_{n2}D_n(AD_n)^{*}\Big]z^{-g}, \tag{A9}$$

$$D_{c2}^{*}z^{-g_1}K_0 + L_0(A_wA_e) = \Big[Q_{n11}^{*}Q_{n11}zH_1^{*}A^{*}D_n^{*} + \sum_{i=1}^{P}Q_{n1i}^{*}Q_{n1i}z^{i+1}(G_iA + F_iB)^{*}\Big]Ez^{-(P+g_1)}. \tag{A10}$$

其中 g, g_1 分别是使式(A8)和式(A9)、式(A10)两边为关于 z^{-1} 的多项式的最小正整数.

式(A8) $\times$ $(\alpha z^{-1}B)$ + 式(A9) $\times$ (αA), 整理得隐式方程

$$AT + z^{-1}BK = \frac{1}{\alpha}D_{c1}. \tag{A11}$$

令 $C_{01} = C_{n1}/C_{d1}$, 由式(A2)~式(A4)、式(A8)、式(A10)和式(A11)得

$$\frac{1}{\alpha}Y_{c1}M_0Y_f - Y_{c1}^{*-1}\phi_1Y_f^{*-1} = \left[\frac{TC_{n1}H_f - KC_{d1}}{A_w(AC_{d1} + z^{-1}BH_fC_{n1})}\right] - \frac{z^gL}{D_{c1}^{*}}, \tag{A12}$$

$$Y_{c2}S_0C_{02}Y_r - Y_{c2}^{*-1}\phi_2Y_r^{*-1} = \left[\frac{D_{c2}EC_{d1}}{A_wD_nA_e(AC_{d1} + BH_fC_{n1})}C_{02}z^{-P} - \frac{K_0}{A_wA_e}\right] - \frac{z^{g_1}L_0}{D_{c2}^{*}}. \tag{A13}$$

仿文[5],令式(A12)和式(A13)中方括号内的项为0有式(9)成立. 由式(9)、式(A11)有式(10)成立,因此标称闭环系统内稳.

容易看出, $\|M_0\|_\infty = \alpha\|\frac{AK}{D_{c1}}\|_\infty$ 是参数 α 的连续函数. 不妨假设加权项 X_{n2} 稳定,令 A_s, A_u 分别表示 A 的首项系数为1的稳定和不稳定部分, a_0 表示 A 的首项系数. 当 $\alpha \to 0$ 时,由式(A5),可取 $D_{c1} = \overline{D}_{c1} + 0(\alpha)$, $\overline{D}_{c1} = a_0A_sA_u^{*}X_{n2}D_n$, $0(\alpha)$ 表示 α 的高阶无穷小. 令 K_1, T_1, L_1 为下列方程组的解,

$$\begin{cases} D_{c1}^{*}z^{-g}K_1 + L_1(A_wA) = 0, \\ D_{c1}^{*}z^{-g}T_1 - L_1(z^{-1}A_wB) = X_{n2}^{*}X_{n2}D_n(AD_n)^{*}z^{-g}. \end{cases} \tag{A14}$$

令 $T = \frac{1}{\alpha}T_1 + 0(\alpha), K = \frac{1}{\alpha}K_1 + 0(\alpha), L = \frac{1}{\alpha}L_1 + 0(\alpha)$. 容易验证当 $\alpha \to 0$ 时, K, T, L 为式(A8)和式(A9)的解,由式(A14)可以看出, T_1, K_1 与 α 无关. 由式(10)知

$$\lim_{\alpha\to 0}\|M_0\|_\infty = \lim_{\alpha\to 0}\alpha\|\frac{AK}{D_{c1}}\|_\infty = \lim_{\alpha\to 0}\|\frac{a_0A_sA_uK_1}{a_0A_sA^{*}Y_uX_{n2}D_n}\|_\infty \leqslant \|\frac{K_1}{X_{n2}D_n}\|_\infty. \tag{A15}$$

由式(A14)和式(A15)可以看出, X_{n2} 是影响 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\|M_0\|_\infty$ 上界的唯一可调参数. 由于式(A15)中各项的分母稳定,因此可适当调整加权项 X_{n2}(比如取 X_{n2} 适当大并且其零点远离单位圆边界),使 $\|\frac{K_1}{X_{n2}D_n}\|_\infty$ 尽可能小,或使 $\|\frac{K_1}{X_{n2}D_n}\|_\infty < 1$.

对上述加权项 X_{n2}，一定存在 α 使得 $\| M_0 \|_\infty$ 较小，进而增强闭环系统的鲁棒稳定性. 实际上，由式(A15)可给出保证闭环系统鲁棒稳定的未建模动态的上界，即 $\| W_\Delta \|_\infty < \| \frac{X_{n2}D_n}{K_1} \|_\infty$.

Design of Predictive Control for Discrete-Time System with Uncertainty

LIU Bing

(System Control Division, Automation Research Institute of Nanjing · Nanjing, 210003, PRC)

FENG Chunbo

(Research Institute of Automation, Southeast University · Nanjing, 210096, PRC)

XUE Yusheng

(Automation Research Institute of Nanjing · Nanjing, 210003, PRC)

Abstract: In this paper, the predictive control of discrete-time system with uncertainty is discussed. On condition that the essential features of GPC are retained. A new cost function, which includes index function used in GPC and sensitivity functions, is proposed, and the robust stability of closed-loop system is improved.

Key words: predictive control; spectrum factorisation; robust design

本文作者简介

刘　兵　1964 年生. 分别于 1985 年、1989 年和 1996 年获河南大学学士、浙江大学硕士和东南大学博士学位. 现为电力部电力自动化研究院系统控制研究所高级工程师. 目前研究兴趣为电力系统的稳定性分析与控制等.

冯纯伯　1928 年生. 中国科学院院士，俄罗斯自然科学院外籍院士，东南大学教授，博士生导师. 目前研究领域为系统建模，鲁棒控制，非线性控制等.

薛禹胜　1941 年生. 1987 年获比利时列日大学博士学位. 博士生导师，电力自动化研究院总工程师，中国工程学院院士. 主要从事电力系统自动化方面的研究工作.