第 15 卷第 4 期
1998 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 4
Aug., 1998

控制理论中的频率定理(Kalman-Yakubovich 引理)*

陈阳舟
(哈尔滨工业大学航天学院·哈尔滨,150001)

陈善本
(哈尔滨工业大学焊接国家重点实验室·哈尔滨,150001)

刘家琦
(哈尔滨工业大学航天学院·哈尔滨,150001)

谨以此文献给 Yakubovich V. A. 教授七十诞辰

摘要: 频率定理(Kalman-Yakubovich 引理)是控制理论中的重要结果之一. 它给出了 Lur'e 方程和 Riccati 方程可解的一个充分必要条件. 本文简要叙述了频率定理建立和发展的历史,描述了它在非线性系统绝对稳定性理论,线性二次型最优控制和自适应控制理论中的部分应用.

关键词: 频率定理(Kalman-Yakubovich 引理); 绝对稳定性理论; 线性二次型最优控制理论; 自适应控制理论

1 引 言

在控制理论中经常遇到二次型矩阵不等式或方程的可解性和求解问题. 寻找其可解的简单易验的条件成为一个关键点. 频率定理(Kalman-Yakubovich 引理)正给出了这类不等式或方程在某个充分少的假定下可解的充分必要的频率条件. 本文我们将叙述频率定理建立和发展的简明历史,然后描述它在非线性系统绝对稳定性理论,最优控制和自适应控制理论中的一些应用. 我们不打算列举所有相关文献和综述所有相关的成果,因为这样做将使本文过于庞杂. 我们的目的只在于牵出一条线索. 因此不可避免会忽略许多重要的作者和他们的工作.

2 频率定理的建立和发展简史

频率定理的名称取自俄罗斯和东欧各国文献. 在国内和欧美文献中常称为 Kalman-Yakubovich 引理(或 Kalman-Yakubovich-Popov 引理). 其产生的源泉是 Lur'e A. I. 和 Postnikov V. N. 对非线性自动调节系统的绝对稳定性研究[1]. 在[2]中 Lur'e 将系统的稳定性归结为一组二次型方程(现称为 Lur'e 方程或代数 Riccati 方程)的可解性. 由于高次 Lur'e 方程难于判别可解性和求解,Popov V. M. 在[3,4]中使用一般的解析方法首先给出了一个频率判据(即 Popov 判据). 随后,Yakubovich 于 1962 年使用完全不同的方法获得了搭建 Lyapunov 方法和频域方法桥梁的频率定理[5]. 这一结果也由 Kalman R. E. 于 1963 年独立获得[6]. 这些工作中对系统可控可观测的维数作了限制,这些限制随后在 Yakubovich[7]和 Popov[8,9]的工作中被取消.

我们来叙述文[10]中给出的频率定理的结论. 在某个充分少的假定之下,存在 Hermite 矩阵 H 使得不等式

$$\mathrm{Re}[x^* H(Ax + bu)] + F(x,u) > 0 \tag{1}$$

对任意不全为零的复向量 x,u 成立的充分必要条件是对于某个 $\delta > 0$ 不等式

$$F(x,u) \geqslant \delta(\|x\|^2 + \|u\|^2) \tag{2}$$

* 国家教委留学回国人员专项基金和国家自然科学基金资助项目(69474014 & 59635160).
本文于 1997 年 7 月 14 日收到. 1998 年 1 月 19 日收到修改稿.

对任意满足 $i\omega x = Ax + bu$ 的 x,u 和 $\omega \in \mathbb{R}:=(-\infty,+\infty)$ 成立，这里 x 和 u 一般为不同维数(譬如分别为 N,n 维)的复向量，A,b 为给定的 $N\times N$ 和 $N\times n$ 复矩阵，$F(x,u)$ 为给定的关于 $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ 的 Hermite 二次型，$\|\cdot\|$ 为通常的欧氏范数.

频率定理还断言，条件(2)也是存在满足方程

$$\mathrm{Re}[x^* H(Ax+bu)] + F(x,u) = \|h^* x + ku\|^2 \tag{3}$$

的维数分别为 $N\times N, N\times n$ 和 $n\times N$ 的矩阵 $H=H^*$，h 和 k 的充分必要条件. 在[10]中还给出了确定矩阵 H,h,k 的一个算法.

如果在恒等式(3)中比较复变量 x,u 的二次型两边的系数，则得到被称为 Lur'e 方程[2]的关系式

$$A^* H + HA - hh^* = G, \quad Hb + hg = f, \tag{4}$$

这里 G,g,f 为二次型 F 的系数矩阵，这组方程在某些情况下(例如 g 可逆时)可以写成一个关于 H 的二次方程，称之为代数 Riccati 方程(在[2]中方程(4)被写成关于 h 的一个方程的形式). 这样，条件(2)是 Lur'e 方程(4)可解的一个充分必要条件.

在 (A,b) 完全能控或 A 为 Hurwitz 稳定矩阵的假定之下频率定理是正确的[10]. 这些假定也可以被减弱到 (A,b) 是能稳的情况.

频率定理还有一系列特殊情形. 例如，不等式(1)变为非严格不等式的退化情况；削弱 (A,b) 假定条件的各种情况；在关于数据 A,b,F 等的各种假设条件之下等式(3)的解 H 和 h 的性质的各种断言等. 这些结果较完整的叙述和证明可见专著[11]及其后的文献. 一系列新的引文可在专著[12]中找到. 我们也特别提请注意在国内和欧美文献中经常出现的"正实引理"和"有界实引理"等也是频率定理的特殊情况.

目前，已有许多方法来证明频率定理. 例如，空间 X 的迭代降维方法[5]；标量和矩阵多项式分解方法[6,9,10]以及另外一些代数方法. 产生这样一些证明方法的一个重要原因在于寻找求解 Lur'e-Riccati 方程的算法. 在线性二次型最优控制问题中二次型 (Hx,x) 正好是 Bellman 函数，而 $u=-k^{-1}h^* x$ 是最优线性调节器. 所以，求解这些矩阵在调节器的实际应用中是重要的. 另一方面，频率定理与控制理论中各种问题的本质联系促使人们把已知的结果引入到新的应用领域中去. 例如，Yakubovich 证明了希尔伯特空间中对于有界算子的频率定理[13]. 此后，对于希尔伯特空间的无界算子也证明了类似的频率定理. 这些结果在分布参数系统中得到了有效的应用[14,15]. 进一步，(退化与非退化的)频率定理被推广到了强连续半群上[16].

频率定理的离散情况(称为 Kalman-Szegö 引理)首先在[17]中得到. 应该指出，在[8,10]等一系列工作中与连续情况平行地也研究了离散情况. 虽然存在形式代数方法(即通过 Cayley 变换方法)把离散定理的证明转化为相应的连续情况，但这种证明方法要求太多的限制条件. 由此，对于离散情况的矩阵方程求解算法的研究是独立进行的[18]. 在[19]等中 Kalman-Szegö 引理被推广到了希尔伯特空间中.

我们也注意到，频率定理可以相对简单地使用 Hamilton 矩阵(对连续时间系统)和对称矩阵(对离散时间系统)工具得到[20,21]. 这种方法被 Yakabovich 应用到周期时变系数的系统的广义频率定理的证明中[13]. 最近，文[22]又推广到了带一般有界时变系数的系统中.

在最近十多年里，随着 H_∞ 最优化理论的发展产生了如下新的问题. 让 $F(0,u)=u^*\Gamma u$，这里 Γ 为非退化的 Hermite 矩阵，要求寻找存在 Hermite 矩阵 H 和矩阵 h 使得对所有 $x\in\mathbb{C}^n$，$u\in\mathbb{C}^m$ 等式(本文中 $\mathbb{C}$ 表示复数域)

$$2\mathrm{Re}x^* H(Ax+bu)+F(x,u)=(h^*x+u)^*\Gamma(h^*x+u) \tag{5}$$

成立的条件. Γ 定号情况下方程(5)可解的充分必要条件由频率定理给出. 如果矩阵 Γ 不是定号的,则类似的频率条件只是必要的,而在一般情况下不是充分的. 对于这个问题的某些重要情形,频率定理在[23,24]中得到了推广.

基于非线性系统的"耗散度"概念的"频率定理"的非线性情况首先由 Willems J. C. 于 1972 年给出[25],一个微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(x,u),\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad u\in\mathbb{R}^m$$

称为相对于给出的二次型 $F(x,u)$ 是 Willems 意义下耗散(简称为 W- 耗散)的,如果存在非负函数 $V(x)$ 使得不等式

$$V(x(t))-V(x(0))+\int_0^t F(x(s),u(s))\mathrm{d}s\leqslant 0 \tag{6}$$

对任意解 $x(t)$ 成立. 函数 $V(x)$ 称为贮存函数(Storage function),$F(x,u)$ 称为供给率函数(Supply rate function),而不等式(6)(称为耗散度不等式)可以解释为系统中抽象能量的平衡. 显然,非严格不等式(1)对某个非负定矩阵 H 成立等价于线性系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=Ax+Bu$ 的 W- 耗散性. 对于仿射非线性系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(x)+g(x)u$,文[26]指出,存在函数 $V(x)$ 满足一个由(6)的微分形式通过比较系数而得到的泛函关系式,等价于对系统的所有初始状态成立不等式

$$\int_0^t F(x(s),u(s))\mathrm{d}s\geqslant 0. \tag{7}$$

不等式(7)可以看作为非线性系统类似于频率不等式的时域形式. 这个结论被称为非线性 Kalman-Yakubovich 引理. 这个结论的不同情况以及它在非线性系统和自适应系统分析与设计问题中的应用可见[27,28]. 离散时间系统的研究可参见[29,30].

下面我们来叙述频率定理(Kalman-Yakubovich 引理)的几个主要应用. 我们的注意力放在连续时不变系统上.

3 非线性系统绝对稳定性研究中的频率定理

频率定理首先被用到带一个非线性部分的自动调节系统绝对稳定性的研究中[1,31].

设 A 为 $m\times m$ 矩阵,b,c 为 m 维列向量,(A,b) 为完全能控的. 考虑如下自动调节系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=Ax+b\xi,\quad \sigma=c^*x,\quad \xi=\varphi(\sigma), \tag{8}$$

$$0\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant\mu\sigma^2\quad(\forall\ \sigma), \tag{9}$$

这里函数 φ 连续(一般的条件 $\nu\sigma^2\leqslant\sigma\varphi(\sigma)\leqslant\mu\sigma^2$ 可通过适当变换化为(9)式情形). 对于(8)、(9)的绝对稳定性问题在于寻找关于系数 A,b,c,μ 的条件以保证系统(8)对于所有满足角域(9)的非线性函数全局渐近稳定. 显然,系统绝对稳定的一个必要条件是至少存在一个 $k\in[0,\mu]$ 使得当 $\xi=k\sigma$ 时系统(8)渐近稳定. 这个必要条件被称为在角域(9)中的最小稳定性[11],以后我们总假定它被满足. 这个条件很容易由 Nyquist 判据检验. 为解上述绝对稳定性问题,引入 Lyapunov 函数

$$V(x)=x^*Hx+\theta\int_0^\sigma\varphi(s)\mathrm{d}s. \tag{10}$$

这里 H 被选择使得对带约束(9)的方程(8)的所有解 $x(t)$ 成立不等式

$$\frac{\mathrm{d}V(x(t))}{\mathrm{d}t}\leqslant-\varepsilon(\|x(t)\|^2+\|\xi(t)\|^2),\quad \varepsilon>0. \tag{11}$$

使用S-过程方法，上式等价于不等式

$$\mathrm{Re}\{2x^* H(Ax + b\xi) + \theta\xi^* c^*(Ax + b\xi) + \xi^*(c^* x - \mu^{-1}\xi)\} < 0 \tag{12}$$

对任意 $x \in \mathbb{C}^m, \xi \in \mathbb{C}^1$：$\|x\| + \|\xi\| \neq 0$ 成立. 应用频率定理可得

定理 1(Popov 判据)　若满足条件(9)且存在常数 θ 使得对任意 $\omega \in [-\infty, \infty]$ 成立条件

$$\mathrm{Re}[(1 + i\omega\theta)W(i\omega)] + \frac{1}{\mu} > 0, \tag{13}$$

则系统(8)绝对稳定.

当(8)中函数 φ 为时变函数 $\xi = \varphi(t,\sigma)$ 时，这里 $\varphi(t,\sigma)$ 对所有的 $t \geqslant 0, \sigma \in (-\infty,\infty)$ 满足

$$0 \leqslant \sigma\varphi(t,\sigma) \leqslant \mu\sigma^2, \tag{14}$$

我们有下面的结果.

定理 2(园判据)　如果 $\varphi(t,\sigma)$ 满足(14)，则系统(8)(其中 $\xi = \varphi(t,\sigma)$)绝对稳定的一个充分条件是对于所有的 $\omega \in [-\infty,\infty]$ 满足下面的频率条件

$$\mathrm{Re}W(i\omega) + \frac{1}{\mu} > 0. \tag{15}$$

显然，这个不等式是 Popov 频率条件当 $\theta = 0$ 时的特殊情况. 如果角域条件(14)式换成 $\nu\sigma^2 \leqslant \sigma\varphi(t,\sigma) \leqslant \mu\sigma^2$，则园判据条件(15)变为 $\mathrm{Re}\{[1 + \nu W(i\omega)][1 + \mu W(i\omega)]\} > 0$.

频率定理表明，不等式(12)关于矩阵 H 的可解性等价于条件(13)成立. 从而条件(13)正好是系统(8)、(9)存在形如(10)的 Lyapunov 函数的充分必要条件.

定理 1 由 Popov 基于一般的解析方法首先得到[3,4]. 但是 Lyapunov 函数方法比 Popov 解析方法给出了系统(8)的解的更多信息. 在[32]中研究了当 A 在虚轴上有特征根时的临界情况. 在[33～35]中获得了比园判据和 Popov 判据更强的系统(8)(其中 $\xi = \varphi(t,\sigma)$)的频率判据.

六十年代中期，频率定理被应用到受迫振动系统[36]，带滞后非线性和单调非线性部分系统的绝对稳定性分析中[37,38]. 文[39]给出了这类问题的较完整的结果. 其中给出了满足局部、积分和微分二次型关系(这些概念见[39])的系统的绝对稳定性的一般频率判据. 从这个判据中容易推出 Popov 判据和圆判据. 这个一般的判据也可用于带几个时变的、非连续的和滞后的非线性部分的新的一类非线性系统的绝对稳定性分析[11].

定理 3[39]　设 $M = \{\varphi\}$ 为一给定的非线性函数类. 假定对某些二次型 F_1, F_2, F_3 系统(8)对任意 $\varphi \in M$ 满足带二次型 F_1 的局部关系，带二次型 F_2 的微分关系以及带二次型 F_3 的积分关系(并假定微分关系中使用的函数 Φ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的每一个有界集上关于 φ 一致有界，积分关系中使用的常数 γ 与 φ 无关). 设 (A,b) 能稳，系统(8)在类 M 中最小稳定且对于某个 $\varepsilon > 0$ 下面的不等式

$$\Pi(i\omega,\xi) = \mathrm{Re}\{F_1(x_\omega,\xi) + F_2(x_\omega,\xi) + F_3(x_\omega,\xi)\} \leqslant -\varepsilon(\|x_\omega\|^2 + \|\xi\|^2) \tag{16}$$

对所有满足 $Ax_\omega + b\xi = i\omega x_\omega$ 的 $(x_\omega,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1$ 成立. 那么，系统(8)在类 M 中绝对稳定.

注意不等式(16)在某些情况下可以削弱成非严格不等式[11].

基于频率定理的方法与绝对稳定性理论中的其它方法相比，其最大的优越性在于分析有非唯一平衡状态的系统[11]，以及导出绝对不稳定性和自振性判据[40,41]. 此时 Popov 解析方法[3]或算子方法[42]的应用产生了困难，而 Lyapunov 函数理论工具使我们可以沿着频率定理

的应用途径获得有非唯一平衡状态的系统的平衡状态集全局稳定的判据. 绝对稳定性的概念对系统不稳定性的自然扩展是[40]中引入的绝对不稳定性的概念. 在[40]中获得了关于系统(8)满足局部关系和微分关系时绝对不稳定的一般判据. 绝对稳定性和绝对不稳定性判据在[41]中被用来导出系统(8)的自振性频率判据. 绝对稳定性理论的发展与带不完全信息非线性部分的系统(8)的全局稳定性判据的寻找问题密切相关. 经典的绝对稳定性判据(圆判据和 Popov 判据)仅仅假定函数 φ 的轨迹位于给定的角域内. 关于非线性部分的附加信息自然应该被用来加强绝对稳定性的判据. 但是,由这些信息无法建立能导出更强判据的局部关系或积分关系. 为了应用这些辅助信息来导出更强的频率判据. 一个新的方法是扩展状态空间方法. 在[28]中这个方法首先被用来导出当非线性类为导函数有界时系统(8)绝对稳定的判据. 同期的工作也有[43]. 我们还要指出,所有上述结果可以扩展到带多个非线性部分的系统中去. 此外,频率定理在相位周期(Phase synchronization)系统的研究中也起着重要作用[44]. 如今,它又被用到了不确定性系统的镇定问题中[45].

4　线性二次型最优控制理论中的频率定理

频率定理在线性二次型最优控制理论中也扮演着重要角色,并且频率条件(2)及其中的矩阵 H,h 也获得了另一些有意义的解释. 这对于扩展频率定理到状态空间和(或)控制空间为无穷维情形是有益的[13,15,16].

作为例子,我们考察时不变线性二次型最优控制问题,设系统由下面方程描述

$$\dot{x} = Ax + Bu,\quad 0 \leqslant t < \infty,\quad x(0) = a. \tag{17}$$

这里 $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态,$u = u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制,A,B 为常实矩阵,向量 $a \in \mathbb{R}^n$ 给定. 假定任意使得

$$\| x(\cdot) \| + \| u(\cdot) \| \in L_2 \tag{18}$$

的可测函数 $u(\cdot):[0,\infty] \to \mathbb{R}^n$ 为容许控制,这里 $x(\cdot)$ 为(17)由控制 $u(\cdot)$ 导出的解. 问题在于寻找容许控制使得

$$J[x,u] = \int_0^{\infty} G(x(t),u(t))\mathrm{d}t \to \inf, \tag{19}$$

这里 $G(x,u)$ 为给定的二次型

$$G(x,u) = x^* Gx + 2x^* gu + u^* \Gamma u. \tag{20}$$

其中 $G = G^*, g, \Gamma = \Gamma^*$ 为常实矩阵. 这个问题只有当满足(17),(18)的$[x(\cdot),u(\cdot)]$构成的容许过程集 $M(a)$ 不空时才有意义. 今后为简单起见,假定(A,B)是完全能控的,从而对任意的 $a \in \mathbb{R}^n$ 有 $M(a) \neq \varnothing$(可以证明 $M(a) \neq \varnothing$ 等价于(A,B)能稳[13]). 上述问题的研究起源于 Kalman[46] 和 Letov[47] 等的工作,随后许多作者也研究了这个问题[10,20,48]. 最初的工作中假定二次型 $J[x,u]$ 是非负定的,或更强地为正定的. 最后的假定保证了最优过程的存在性和唯一性. 由于应用的需要,二次型泛函 $J[x,u]$ 不定的情况也被考虑. 此时,最优值可能是不可达的. 例如,可能 $\inf J[x,u] = -\infty$. 从而对于一般情况是否存在最优控制成为一个独立的课题. 在(A,B)能控情况下有且仅有下面三种情况:第一,对任意的 $x(0) = a \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\inf_{M(a)} J[x,u] = -\infty, \tag{21}$$

从而问题(17)～(20)无解;第二,对任意的 $x(0) = a \in \mathbb{R}^n$,问题(17)～(20)有且仅有一解,这种情况称为正则的;第三,对任意的 $x(0) = a \in \mathbb{R}^n$,有 $\inf_{M(a)} J[x,u] > -\infty$ 但问题是非正则的,这种情况称为奇异的. 此时问题(17)～(20)或有通常的解或有渐近的解,即其解为使得

$$J[x_j(\cdot),u_j(\cdot)] \to \inf_{M(a)} J[x,u] \quad (j \to \infty)$$

的容许过程序列 $\{[x_j(\cdot),u_j(\cdot)]\}_{j=1}^{\infty} \subset M(a)$ 对正则与奇异问题也有另外一些定性区分[49]. 下面的引理通过频率条件给出了上述每一种情况的判别条件.

引理 1[10,49] 设 (A,B) 完全能控.

1) 问题(17)～(20)正则当且仅当对某个 $\delta > 0$ 不等式

$$G(\hat{x},\hat{u}) \geqslant \delta(\|\hat{x}\|^2 + \|\hat{u}\|^2) \tag{22}$$

对于任意 $\omega \in \mathbb{R}$ 和任意满足 $i\omega\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u}$ 的 $\hat{x} \in \mathbb{C}^n, \hat{u} \in \mathbb{C}^m$ 成立.

2) 问题(17)～(20)为奇异当且仅当不等式(22)被破坏但对于所有满足 $i\omega\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u}$ 的 $\omega \in \mathbb{R}, \hat{x} \in \mathbb{C}^n, \hat{u} \in \mathbb{C}^m$ 成立下面不等式

$$G(\hat{x},\hat{u}) \geqslant 0. \tag{23}$$

3) 关系式(21)成立当且仅当不等式(23)被破坏,即对某些 $\omega \in \mathbb{R}$ 和满足 $i\omega\hat{x} = A\hat{x} + B\hat{u}$ 的 $\hat{x} \in \mathbb{C}^n, \hat{u} \in \mathbb{C}^m$ 有 $G(\hat{x},\hat{u}) < 0$.

如果 (A,B) 能稳,则 $M(a) \neq \varnothing(\forall\, a \in \mathbb{R}^n)$,从而问题(17)～(20)有意义. 此时引理1中结论1)仍然成立,但结论2)和3)仅仅单向成立:如果问题奇异,则(23)成立而(22)不成立;如果(23)被破坏,则(21)成立. 为了避免烦琐的叙述和有效应用频率定理,我们假定问题(17)～(20)为正则的. 频率定理表明:存在实 $n \times n$ 矩阵 $H = H^*$ 和 $n \times m$ 矩阵 h 满足 Lur'e 方程

$$HA + A^*H + G = h\Gamma h^*, \quad HB + g = -h\Gamma, \tag{24}$$

并且调节器

$$u = h^*x \tag{25}$$

镇定(17). 从而可得

$$J[x(\cdot),u(\cdot)] = V(a) + \int_0^{\infty} \|\Gamma^{1/2}(u(t) - h^*x(t))\|^2 \mathrm{d}t. \tag{26}$$

定理 4[10] 设满足条件(22). 则对于任意的初始状态 $x(0) = a$ 在问题(17)～(20)中存在唯一的最优过程. 这个最优过程由调节器(25)导出,并且 $\min_{M(a)} J = V(a) = a^*Ha$.

上述结果表明,频率定理中的矩阵 H,h 有如下意义下"最优"的含义:h 为最优调节器(25)的系数,H 为所研究问题的 Bellamn 函数的系数矩阵.

定理4和引理1远没有完全表达关于调节器问题(17)～(20)的全部事实. 较完整的结果可见[49].

频率定理在最优控制理论中的应用远非只有问题(17)～(20). 例如,其应用范围还包括:非齐次方程描述的有外扰的系统[50,51];性能指标泛函中不仅包含二次项而且包含线性项的情况[52];上述问题的随机情况[53];特殊假定下的有穷时区上时不变线性二次型问题[54];无穷时区上带周期时变系数的线性二次型问题[55]等. 特别,频率定理还能扩展到一类新的控制对象,譬如,无穷维状态空间的控制对象[13,15,16],差分方程描述的控制对象[19],偏微分方程描述的控制对象[15,16]等. 最近,频率定理又在一类新的最优控制领域中获得了重要应用[56~58]. 频率定理给出了一类特殊的非凸全局最优化问题解的有效算法. 这类问题有着重要的实际意义. 与大部分已知的非凸最优化方法的不同之处在于:所给出的方法基于严格的数学理论,其实质部分是解析的且保证获得全局最优. 其应用范围是本节叙述的那些问题附加一些二次型约束条件. 例如,一个典型问题为在问题(18)～(20)中再附加上约束条件

$$J_1 \leqslant 0, \quad J_2 \leqslant 0, \quad \cdots, \quad J_k \leqslant 0, \tag{27}$$

$$J_i := \int_0^{\infty} G_i(x(t), u(t))\mathrm{d}t - \gamma_i, \quad (i = 1, \cdots, k), \tag{28}$$

这里 $G_i(x,u) = x^* G_i x + 2x^* g_i u + u^* \Gamma_i u, A, B, G_i = G_i^*, g_i, \Gamma_i = \Gamma_i^*$ 为适当维数矩阵. 数 $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ 给定. 约束条件(27)的加入大大增加了情况的复杂性，特别是可能出现非凸全局最优化问题. 一般情况下难以获得这类问题的解. 如众所周知，非凸全局最优化的一般收敛方法的建立问题原理上不可解[59]. 但是，有约束(27)、(28)的问题(17)～(20)以及其它相应问题，正如[56～58]所给出的那样，被简单而优美地解决了.

5　自适应控制中的频率定理

频率定理在自适应控制问题中也找到了应用. 它被有效地应用于自适应调节器的设计问题中. 它可按给定的 Lyapunov 函数类来确定调节器的结构和参数以及自适应算法以保证闭环系统的稳定性且达到给定的控制目的. 下面我们以带显式参考模型的连续对象的自适应控制作为例子说明频率定理的应用.

考虑下面的对象

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \tag{29}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^l, u \in \mathbb{R}^1$，控制目的为

$$e(t) \to 0 \quad (t \to \infty), \tag{30}$$

这里 $e(t) = x(t) - x_m(t), x_m(t)$ 为由下面的方程描述的参考模型的轨迹

$$\frac{\mathrm{d}x_m}{\mathrm{d}t} = A_m x_m + B_m r(t), \quad y_m = C x_m, \tag{31}$$

其中 $r(t)$ 为给定的有界干扰. 考虑线性调节器

$$u = \theta^{\mathrm{T}} z = \theta_y^{\mathrm{T}} y + \theta_r^{\mathrm{T}} r(t). \tag{32}$$

这里 $z = \mathrm{col}(y, r)$ 为观测向量，$\theta = \mathrm{col}(\theta_y, \theta_r)$ 为被调整系数向量. 我们的问题在于寻找向量的形如 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = F(y, y_m, \theta)$ 的自适应算法以保证目的(30)达到. 为此，选择二次型 Lyapunov 函数

$$V(x, \theta, t) = e^{\mathrm{T}} H e + (\theta - \theta_*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{-1} (\theta - \theta_*), \tag{33}$$

这里 $H = H^{\mathrm{T}} > 0, \Gamma = \Gamma^{\mathrm{T}} > 0$ 为适当维数的矩阵，θ_* 为某个常向量. 如果要求满足条件 $\dot{V} \leqslant 0$ 且假定向量 $\theta_* = \mathrm{col}(\theta_{*y}, \theta_{*r})$ 满足所谓的匹配条件(Matching conditions)

$$A_m = A + B\theta_{*y}^{\mathrm{T}} C, \quad B_m = B\theta_{*r}, \tag{34}$$

则经过简单的变换后得到的自适应算法的结构应为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\Gamma g^{\mathrm{T}} (y - y_m) z, \tag{35}$$

这里 $g \in \mathbb{R}^l$ 为某个向量. 可以证明要满足不等式(为保证目的(30)达到而引入)

$$\dot{V} < 0 \quad (e \neq 0) \tag{36}$$

当且仅当成立不等式

$$HA_m + A_m^{\mathrm{T}} H < 0, \quad HB = C^{\mathrm{T}} g. \tag{37}$$

对于二次型 $F(x,u) = (g^{\mathrm{T}} C x) u$ 应用频率定理得到存在具有性质(36) 的 Lyapunov 函数(33) 当且仅当矩阵 A_m 为 Hurwitz 矩阵且对于某个 $\delta > 0$ 和所有的 $\omega \in \mathbb{R}$ 成立频率不等式

$$\mathrm{Re}\, g^{\mathrm{T}} W_m(i\omega) \geqslant \frac{\delta}{1 + \omega^2}, \tag{38}$$

这里 $W_m(p) = C(pI - A_m)^{-1} B_m$.

带传递函数 $g^{\mathrm{T}}W_m(p)$ 且满足(38)的系统称为严无源系统(Passive system),而满足 $\delta=0$ 时的(38)时,则称为无源系统. 注意到无源性也可以表示为:时间域不等式 $\int_0^t y_S(t)u_S(t)\mathrm{d}t\geqslant 0$ 必须对给定的系统 S 的任意输入函数 $u_S(\cdot)$,零初态和相应的输出函数 $y_S(\cdot)$ 成立. 这种形式的无源性概念可以推广到非线性系统,它是 W-耗散性概念的特殊情况.

这样,频率定理的引入简化了自适应调节器的设计,它使得寻找满足(37)的矩阵 H 的过程不再必要. 此外,从系统的无源性质可以推出函数 $g^{\mathrm{T}}W_m(p)$ 的分子分母阶次之差必为 1 以保 证所述的调节器的可用范围. 频率定理的这种应用出现于文[60](对于某些特殊情况). 随后,文[61]讨论了由传递函数描述的对象. 这里叙述的结果取自于[62,第 7 章]. 另外一些类似的应用见[62,第 6 章]等. 此外,文[64,65]等讨论了带"带反馈关系的频率定理"和它在"带非显式参考模型的自适应系统"中的应用. 这些方法和结果也被推广到分布系统[66]和延迟系统[63].

非线性自适应系统设计的更一般方法(无源化方法)建立在所谓带反馈关系的非线性频率定理[27]基础上. 文[27]指出,在某种正则性假定之下存在反馈关系 $u=\varphi(x)$ 以保证闭环系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(x)+g(x)u, y=h(x)$ 满足无源性条件等价于系统是弱最小相位的(即它在流形 $h(x)=0$ 上的运动是 Lyapunov 意义下稳定的)且具有相对阶 1(即 $\nabla h(x)^{\mathrm{T}}g(x)\neq 0(\forall\, x)$). 注意,上述对于非线性系统的弱最小相位性质退化到线性系统正是标准的定义,因为它意指系统零动态(相应于 $y=0$ 的动态)的 Lyapunov 意义下的稳定性. 最小相位和指数最小相位的概念以一种自然的方式被引入来代替系统的 Lyapunov 渐近稳定性和指数稳定性概念.

我们也指出对设计的自适应调节器的相对阶的限制可以通过引入并联于对象的滤波器而取消,即可用动态反馈代替静态反馈.

另外,由 Popov 引入的超稳定概念在 70 年代初导出了一个新的自适应系统设计方法[67]. 在基于超稳定性概念的思想中没有使用状态空间,而应用系统输入、输出描述. 例如,在带显示参考模型自适应控制问题中,类似于(35)的基于超稳定性设计的自适应算法为

$$\theta(t)=\theta_0-\Gamma\int_0^t\delta(s)z(s)\mathrm{d}s+\Psi(z,t),$$

这里 $\Psi(z,t)$ 为使得 $\Psi(z,t)^{\mathrm{T}}z\geqslant 0$ 的连续向量函数, $\delta=g^{\mathrm{T}}Ce$.

从频率定理可以推出这两种方法是完全等价的[68,69]:如果满足通过超稳定性方法得到的条件,则闭环系统存在特殊类型的 Lyapunov 函数,反之亦然.

6 结束语

本文我们给出了频率定理(Kalman-Yakubovich 引理)的一般描述,讨论了它在非线性系统绝对稳定性理论,线性二次型最优控制和自适应控制理论中的部分应用. 如今,频率定理仍然还有强劲的生命力,是线性和非线性系统理论中最重要、最基本的工具之一. 其应用范围还在不断扩大. 例如,最近已开始被应用到 H_∞-控制和 Q-镇定等鲁棒控制问题中.

直接或间接、明显或不明显地应用了频率定理的工作可以说浩如烟海,在这里列举全部或甚至大部分文献都是不可能的. 我们仅以 Yakubovich 和他的同事与学生们的工作作为一条线索简要地叙述了频率定理和它的应用,而对国内和欧美的工作基本没有涉及. 我们把注意力放在介绍俄罗斯的工作,这样做一方面因为篇幅所限而国内和欧美此类工作又十分庞杂,另一方面也因为后者较易为大家获知. 例如,在国内绝对稳定性方面可看著作[70~73]等及其后的

文献,自适应控制方面可看[74,75]等及其后的文献.鉴于这些原因,谨向那些与本综述相关(甚至密切相关)而没能提及的文献的作者们致歉.

致谢 冯纯伯教授、黄琳教授和秦化淑教授在百忙之中审读了本文初稿,提出了许多有益的意见和建议.在此谨向他们表示衷心的感谢!

Yakubovich V. A. 1949 年毕业于莫斯科国立大学数学力学系.1953 年和 1959 年在列宁格勒大学(现圣·彼得堡大学)分别获得哲学博士(Ph. D)和科学博士(Dr. of Sci.)学位.1963 年起任列宁格勒大学(圣·彼得堡大学)教授.现为俄罗斯自然科学院院士和俄罗斯科学院通讯院士.独立(或第一作者)发表论文二百多篇.合作出版专著七本.在参数共振理论、非线性系统稳定性理论、最优化理论和自适应控制理论等领域里作出了突出的贡献.曾在许多科学委员会和杂志编委会任职.1991 年获 Norbert Wiener 奖.1995 年获国际出版公司"Nauka"的最佳论文奖.1996 年获 IEEE Control Systems 奖.Yakubovich 教授一生十分勤勉,从未间断过科学研究.他不仅治学态度严谨、具有敏锐的洞察力和永远开拓进取不知疲倦的工作作风,而且为人也十分谦逊.所有这些都给人留下了深刻的印象.

参 考 文 献

1 Лурье, А. И., Постников, В. Н.. К теории устойчивости регулируемых систем. Прикладная математика и механика, 1994, 8(3): 246—248

2 Лурье, А. И.. Некоторые Нелинейных Задачи Теории Автоматического Регулирования. Москва: Гостехиздат, 1951

3 Popov, V. M.. Criterii de stabilitate pentru sistemele nonlineare de reglage automata bazata pe utilliarea transformanei laplace. Studii si Cercetari de Energetica. Acad. RPR, 1959, 9(1): 17—35

4 Попов, В. М.. Об абсолютная устойчивость нелинейных систем автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика АиТ, 1961, 22(8): 961—979

5 Якубович, В. А.. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования. Дкол. АН СССР., 1962, 143(6): 1304—1307

6 Kalman, R. E.. Liapunov function for the problem of Lur'e in automatic control. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 49(2): 201—205

7 Гантмахер, Ф. Р., Якубович, В. А.. Абсолютная Устойчивость Нелинейных Регулируемых Систем, В кн.: Труды II Всесоюзного Съезда По теоретической и Прикладной Механике. Москва: Наука, 1965

8 Popov, V. M.. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions. Rev. Roumanie Sci. Techn., 1964, 9(4): 629—690

9 Попов, В. М.. Гиперустойчивость Автоматических Систем. Москва: Наука, 1970

10 Якубович, В. А.. Частотная теорема в теории управления. Сиб. Мат. журн., 1973, 14(5): 1100—1129

11 Гелиг, А. Х.. Леонов, Г. А., Якубович, В. А.. Устойчивость Нелинейных Систем с Неединственных Состоянием Равновесия. Москва: Наука, 1978

12 Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E., Balakrishnan, V.. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theroy. SIAM, Philadephia, 1994

13 Якубович, В. А.. Частотная теорема для случая, когда пространство состоянии и управлении гильбертовы, и ее применение в некоторых задачах оптимального управнения I, II. Сиб. мат. журн., 1974, 15(3): 639—668; 1975, 16(5): 1081—1102

14 Врусин, В. А.. Уравнения лурье в гильбертовом пространстве и их разрещимость. Прикладная Математика и Механика, 1976, 40(5): 947—955

15 Лихторников, А. Л., Якубович, В. А.. Частотная теорема для уравнении эволюционного типа. Сиб. мат журн., 1976, 17(5):

1069—1085

16 Лихтарников, А. Л., Якубович, В. А.. Частотная теорема для однопараметрических полугрупп. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1977,(4):895—911

17 Szegö, G., Kalman, R.. Sur Stabilite Absolute d'un systeme d'equations aux differences finies. Comptes Ren. Sc. Paris, 1963,257(2):388—390

18 Андреев, В. А., Шепелявыи, А. И.. Синтез оптималъных управлении для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизация среснего значения функционала квадратичного типа. Сиб. мат. журн., 1973,14(2):384—190

19 Лихтарников, А. Л., Пономаренко, В. И., Якубович, В. А.. Дискретная частотная теорема для случая гильбертовых пространств состояннии и управлении. Вестник ЛГУ. Сер. Матем., механ., астр., 1976, Выб. 4(19):69—76

20 Willems, J. C.. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. IEEE Trans. Automat. Contr., 1971, AC-16:621—634

21 Molinari, B. P.. Stabilizing solution of the Algebraic Riccati equation. SIAM, J. Control, 1973, 11(2):262—271

22 Savkin, A. V.. Generalizations of the Kalman-Yakubovich lemma and their applications. 12th World Congress International Federation of Automatic Control, Sydney, 1993, 1:475—478

23 Якубович, В. А.. Решение однои алгебраическои задачи, встречающенся в теории управления. Дакл. АН СССР., 1970, 193(1):57—61

24 Barabanov, N. E.. Extension of Yakubovich-Kalman lemma and quadratic stabilization of uncertain systems. Proc. of ECC., Roma, 1995, 2:1775—1780

25 Willems, J. C.. Dissipative dynamic systems. part I. General Theory, Arcive Rational Mechanics and Analysis, 1972, 45(5):321—393

26 Hill, D. J., Moylan, P. J.. Stability of nonlinear dissipative systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1976, AC-21:708—711

27 Byrnes, C. I., Isidori, A., Willems, J. C.. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, AC-36:1228—1240

28 Seron, M. M., Hill, D. J., Fradkov, A. L.. Nonlinear adaptive control of feedback passive systems. Automatica, 1995, 31(7):1053—1060

29 Lin, W., Byrnes, C. I.. Kalman-Yakubovich-Popov lemma, state feedback and dynamic out feedback in discrete-time bilinear systems. Systems and Control Letters, 1994, 23:127—136

30 Byrnes, C. L., Lin, W.. Losslessness, feedback equivalence and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, AC-39(1):83—98

31 Аизерман, М. А., Гантмахер, Ф. Р.. Абсолютная Устончиность Регулируемых Систем. Москва: Изд-во АН СССР, 1963

32 Якубович, В. А.. Абсолютная устоичивость нелиненных регулируемых систем в критических случаях I - III. АнТ, 1963, 24(3):293—303; 1963, 24(6):717—731; 1964, 25(5):601—612

33 Баркин, А. И., Зеленцовскии, А. Л.. Абсолютная устоичивость систем регулировании с единственным нелиненным элементом. Докл. АН СССР, 1984, 276(4):809—812

34 Леонов, Г. А.. Об одном расширении частотного критерия попова для нестационарных нелинеиностеи. АнТ, 1980, (11):21—26

35 Барабанов, Н. Е.. Новые частотные критерии абсолютнои устоичивости и неустоичивости систем автоматического управления с нестационарнои нелинеиностью. Дифференц. Уравнения, 1989, 25(4):555—563

36 Якубович, В. А.. Частотные условия существования абсолютно устоичивых и почти переоди ческих предельных режимов системы автоматического регулированиясо многими нестацно нарными нелинеиностями. Труды III Международного конгресса ИФАК, 1966, 177—181

37 Якубович, В. А.. Частотные условия абсолютнои устоичивости регулируемых систем с гистерезисными нелинеиностями. Докл. АН СССР, 1963, 149(2):288—291

38 Якубович, В. А.. Метод матричных неравенств в теории устоичивости нелиненных регулируемых систем II. Абсолютная Устоичивость в Классе Нелинеиностеи с Ограничением на Производную, АнТ, 1965, 26(4):577—590

39 Якубович, В. А.. Частотные условия абсолютнои устоичивости систем управления с несколькими нелиненными или линеиными нестационарными влоками. АнТ, 1967, 28(6):5—30

40 Якубович, В. А.. Абсолютная неустойчивость нелинейных систем управления I, II. АиТ, 1970, (12): 5—14; 1971, (6): 25—34

41 Якубович, В. А.. Частотные условия автоколебании в нелинейных системах с одной стацио нарной нелинейностью. Сиб, мат. журн., 1973, (5): 110—129

42 Zames, G.. On the input-output stability of time-verying nonlinear feedback systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1965, AC-11(2): 228—239; AC-11(3): 465—476

43 Zames., Falb, P. L.. In the stability of systems with monotone and odd monotone nonlinearities. IEEE Trans. Automat. Contr., 1967, AC-12(2): 221—223

44 Leonov, G. A., Ponomarenko, D. V., Smirnova, V. B.. Frequency-Domain Methods for Nonlinear Analysis: Theory and Applications. Singapore: World Scientific, 1996

45 Боарабанов, Н. Е.. О стабилизации линеных нестационарных систем с неопределенностью в коффициентах. АиТ, 1990, (10): 30—37

46 Kalman, R. E.. Contributions to the theory of optimal control. Bol. Soc. Math. Mexicana(2), 1960, 5: 102—119

47 Летов, А. М.. Аналитическии синтез регулятоеов. АиТ, 1960, (4): 436—446; (5): 561—571

48 Лурье, А. И.. Минимальныи квадратичныи критерии качества регулируемои системы. Изд. АН СССР. Техн. кибернетика, 1963, (4): 140—146

49 Megretskii, A. V., Yakubovich, V. A.. Singular stationary nonhomogeneous linear-quadratic optimal control. Amer. Math. Soc. Transl., 1993, 155(2): 129—167

50 Андреев, В. А., Казаринов, Ю, Ф., Якубович, В. А.. О синтезе оптимальных управлении в задаче минимизации квадратичного функционала. Докл. АН СССР, 1972, 202(6): 1247—1250

51 Якубович, В. А.. Линеино-квадратичная задача оптимального гашения вынужденных колебании при неизвестном гармоническом внешнем воздеиствии, Докл. АН СССР, 1993, 333(2): 170—172

52 Якубович, В. А.. Задача об оптимальном отслеживании детерминированиых гармонических сингналов с известным спектром. Докл. АН СССР, 1994, 337(4): 463—466

53 Якубович, В. А.. Оптимизация и инвариантность линеиных систем управления. АиТ, 1984, (8): 5—45

54 Якубович, В. А.. О синтезе оптимальных регуляторов в линеинои дифференциальнои игре на конечном времеммом интервале с квадратичным функционалом. Докл. АН СССР, 1971, 200(33): 548—551

55 Якубовнч, В. А.. Линеин-квадратичная задача оптимизации и частотная теорема для периоди ческих систем. Сиб. мат. журн., 1986, 27(4): 181—200

56 Rinnooy Kan, A. H. G., Boender, C. G. E., Timmer, G. T.. Computational Mathematical Programming, ed. by K. Schittkowski. Berlin: Springer-Verlag, 1984, 281—308

57 Yakubovich, V. A.. Nonconvex optimization problems: the infinite-horizon linear-quadratic problems with quadratic constraints. Systems and Control Letters, 1992, 19(1): 13—22

58 Матвеев, А. С.. Якубович, В. А.. Невыпуклые задачи глобальнои оптимизации. Алгебра и Анализ, 1992, 4(6): 189—219

59 Matveev, A. S.. Yakubovich-Kalman theory as background for methods of nonconvex global optimization. Proc. ECC, Italy, Rome, 1995, 1787—1791

60 Parks, P. C.. Lyapunov redesign of model reference adaptive control systmes. IEEE Trans. Automat. Contr., 1966, AC-11(3): 362—367

61 Monopoli, R. V.. Kalman-Yakubovich lemma in adaptive control systems design. IEEE Trans. Automat. Contr., 1973, AC-18(5): 526—529

62 Фомин, В. Н., Фрадков, А. Л., Якубовнч, В. А.. Адаптивное Управление Динамическими Объектами. Москва: Наука, 1981

63 Цыкунов, А. М.. Адаптивное Управление Объектами с Последеиствием. Москва: Наука, 1984

64 Фрадков, А. Л.. Синтез адаптивнои системы стабилизации линеиного динамического объекта. АиТ, 1974, (12): 96—103

65 Saberi, A., Kokotovic, P., Sussmann, H.. Global stabilization of partially linear composite systems. SIAM J. Control Optim., 1990, 28(6): 1491—1503

66 Бондарко, В. А., Лихтарников, А. Л., Фрадков, А. Л.. Синтез адаптивнои системы стабилизации линеиного объета с распределенными параметрами. АиТ, 1979, (12): 95—103

67 Landau. I. D.. A hyperstability criterion for model-referece adaptive control systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1969, AC-19(5): 552—555

68 Narendra, K. S., Valavani, L. S.. A Comparison of Lyapunov and Hyperstability Approaches to Adaptive Control of Continuous Systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1980, AC-25(2): 243—247

69 Андриевский, Б. Р., Стоцкин, А. А., Фрадков, А. Л.. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управления и адаптации. АиТ, 1988, (12): 3—39

70 谢惠民. 绝对稳定性理论与应用. 北京:科学出版社, 1986

71 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京:科学出版社, 1988

72 黄琳. 稳定性理论. 北京:北京大学出版社, 1992

73 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用. 武汉:华中师范大学出版社, 1988

74 冯纯伯, 史维. 自适应控制. 北京:电子工业出版社, 1986

75 袁震东. 自适应控制理论及其应用. 上海:华东师范大学出版社, 1988

Frequency Theorem (Kalman-Yakubovich Lemma) in Control Theory

CHEN Yangzhou

(Institute of Astronautics, Harbin Institute of Technolgy · Harbin, 150001, PRC)

CHEN Shanben

(National Key Laboratory of Advanced Welding Production, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

LIU Jiaqi

(Institute of Astronautics, Harbin Institute of Technology · Harbin, 150001, PRC)

Abstract: Frequency theorem (or Kalman-Yakubovich lemma) is one of the most important results in the control theory. It gives a sufficient and necessary condition for the solubility of Lur'e equation and Riccati equation. In this paper, we set forth the history of its establishment and development. We expound its application in the absolutely stability theory, the optimal control theory and the adaptive control theory.

Key words: frequency theorem (Kalman-Yakubovich lemma); absolutely stability; linear-quadratic optimal control; adaptive control

本文作者简介

陈阳舟 见本刊1998年第3期第454页.

陈善本 1956年生. 控制理论及其应用专业博士. 现任哈尔滨工业大学教授, 博士生导师. 目前研究领域有鲁棒控制, 最优控制, 机器人焊接智能化相关的理论与应用等.

刘家琦 1941年生. 现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师. 主要从事计算数学、应用数学和应用地球物理等领域有关反问题的研究. 曾多次获得石油部和航天部科技进步奖.