第 15 卷第 5 期　　控制理论与应用　　Vol. 15, No. 5
1998 年 10 月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Oct., 1998

LQ 优化的并行化方法

慕德俊　戴　航　佟明安　戴冠中
(西北工业大学自动控制系·西安,710072)

摘要：本文提出了两种有效的并行 LQ 优化算法，分别用于求解多输入及单输入情况下控制参数合成. 这两种算法都可以用脉动(Systolic)阵列结构并行实现. 通过对数据流时序以及处理器利用率的分析，说明了并行方法的有效性.

关键词：Systolic 阵列；LQ 优化；并行算法

1　引　言

线性二次型(LQ)性能指标的优化问题，在控制领域中应用得很广泛，但由于每次递推计算时，需进行大量的矩阵相乘和求逆等串行运算. 如果重新设计基本的控制算法，开发其潜在的并行性，可通过 Systolic 阵列结构并行实现. Chisici, L[1]分析了单输入单输出情况下利用 Systolic 结构实现 LQ 优化问题，这种算法在并行计算时只进行 QR 分解，不能进行多输入情况下 LQ 优化的并行计算. 本文基于并行 QR 分解、矩阵求逆、矩阵相乘及矩阵逆分解方法，提出了两种新的平方根算法和阵列结构，并采用单一阵列结构上多阶段实现的方法，并行求解多输入及单输入情况下的 LQ 优化问题，以加快控制参数的合成.

2　多输入情况下 LQ 优化的新算法及 Systolic 实现

设线性离散时间系统有如下形式

$$X(k+1) = A(k)X(k) + B(k)U(k). \tag{1}$$

式中，$X(k)$ 是 n 维状态变量，$U(k)$ 是 r 维控制变量，$A(k)$ 和 $B(k)$ 分别是 $n \times n$ 和 $n \times r$ 阶系数阵.

若取目标函数

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} [X^{\mathrm{T}}(i)Q(i)X(i) + U^{\mathrm{T}}(i)R(i)U(i)] + X^{\mathrm{T}}(N)Q_0X(N). \tag{2}$$

式中，$Q(i)$ 和 Q_0 是对称的非负定阵，$R(i)$ 是对称的正定阵，$Q(i)$，$R(i)$ 和 Q_0 是已知矩阵，$i = 0,1,\cdots,N-1$.

对于过程(1)，使目标函数(2)最小的容许控制策略为[2]

$$U(k) = -K^{\mathrm{T}}(k)X(k). \tag{3}$$

式中

$$K(k) = [B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)B(k) + R(k)]^{-1}B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)A(k), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} S(k) = {} & Q(k) + A^{\mathrm{T}}(k)\{S(k+1) - S(k+1)B(k) \\ & \cdot [R(k) + B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)B(k)]^{-1}B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)\}A(k). \end{aligned} \tag{5}$$

式中，$S(k)$ 是未知的 $n \times n$ 阶对称阵，易知 $S(k)$ 至少是半正定阵.

由于 $Q(k)$，$R(k)$，$S(k)$ 都是非负定阵，可以进行 Choleski 分解，

$$Q(k) = Q^{\mathrm{T}/2}(k)Q^{1/2}(k),\ R(k) = R^{\mathrm{T}/2}(k)R^{1/2}(k),\ S(k) = S^{\mathrm{T}/2}(k)S^{1/2}(k),\ (k = 0,1,\cdots,N-1).$$

式中，$Q^{1/2}(k)$，$R^{1/2}(k)$，$S^{1/2}(k)$ 是上三角阵.

(4) 式中的 $K(k)$ 和(5) 式中的 $S(k)$ 的平方根算法为[3]

本文于 1996 年 4 月 17 日收到. 1997 年 7 月 28 日收到修改稿.

$$K(k)=G^{-1/2}(k)F(k),\tag{6}$$

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix} S^{1/2}(k+1)B(k) & S^{1/2}(k+1)A(k) \\ R^{1/2}(k) & 0_{r\times n} \\ 0_{n\times r} & Q^{1/2}(k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G^{1/2}(k) & F(k) \\ 0_{n\times r} & S^{1/2}(k) \\ 0_{n\times r} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}.\tag{7}$$

式中，$G^{1/2}(k)$ 是 $r\times r$ 阶上三角阵，$F(k)$ 是 $r\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 是使初始阵三角化的正交阵.

文献[3]很容易地将上述的算法影射到一个 $(n+r)\times(n+r)$ 的三角阵列上，每次并行递推计算采用三个阶段完成，该方法所需的处理单元为 $(n+r)(n+r+1)/2$，每个点递推计算的周期为 $2n+2r$ 个计算步，处理器的利用率在56%以上，如果 $n\gg r$，则利用率接近100%.

3 单输入情况下LQ优化的平方根逆分解算法及Systolic实现

对于过程(1)，若 $U(k)$ 是单输入控制量，则 $B(k)$ 是 $n\times 1$ 阶系数阵，目标函数(2)中的 $R(k)$ 是 1×1 的非负量，当其它参量不变时，(5)式还可表示为

$$S(k)=Q(k)+A^{\mathrm{T}}(k)S_1(k)A(k).\tag{8}$$

式中
$$S_1(k)=\{S(k+1)-S(k+1)B(k)[R(k)+B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)B(k)]^{-1}\cdot B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)\}R^{-1}(k).\tag{9}$$

设 $S_1(k)=S_1^{\mathrm{T}/2}(k)S_1^{1/2}(k)$，$S_1^{1/2}(k)$ 是上三角阵，(9)式还可表示为

$$S_1^{-1}(k)=R(k)S^{-1}(k+1)+B(k)B^{\mathrm{T}}(k).\tag{10}$$

基于平方根逆分解思想[4]，对(10)式做如下分解

$$\begin{aligned}S_1^{-1/2}(k)S_1^{-\mathrm{T}/2}(k)&=R^{1/2}(k)S^{-1/2}(k+1)[I+d(k)d^{\mathrm{T}}(k)]R^{1/2}(k)S^{-\mathrm{T}/2}(k+1)\\&=[R^{1/2}(k)S^{-1/2}(k+1)W(k)][W^{\mathrm{T}}(k)R^{1/2}(k)S^{-\mathrm{T}/2}(k+1)].\end{aligned}$$

式中，$S^{-1/2}(k+1)$，$W(k)$ 是上三角阵，且有

$$\begin{aligned}&W(k)W^{\mathrm{T}}(k)=I+d(k)d^{\mathrm{T}}(k),\quad S_1^{-1/2}(k)=W^{-1}(k)R^{-1/2}(k)S^{-1/2}(k+1),\\&d(k)=S^{1/2}(k+1)B(k)R^{-1/2}(k).\end{aligned}\tag{11}$$

于是，可通过以下QR分解算法，计算(4)，(5)两式.

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}-d(k)\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\g(k)\end{bmatrix},\tag{12}$$

式中，$g(k)=(1+d^{\mathrm{T}}(k)d(k))^{1/2}$，$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}W^{-1}(k) & W^{\mathrm{T}}(k)d(k)g^{-2}(k)\\-d^{\mathrm{T}}(k)g^{-1}(k) & g^{-1}(k)\end{bmatrix}$.

通过(12)式产生的正交旋转参数阵，可得到下列等式：

$$\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{R(k)}}S^{1/2}(k+1)\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1^{1/2}(k)\\f^{\mathrm{T}}(k)\end{bmatrix}.\tag{13}$$

式中

$$f(k)=-\frac{S(k+1)B(k)}{\sqrt{R(k)}[R(k)+B^{\mathrm{T}}(k)S(k+1)B(k)]^{1/2}}.$$

则

$$K(k)=-f(k)A(k)/g(k),\tag{14}$$

$$\boldsymbol{Q}_1\begin{bmatrix}\sqrt{R(k)}S_1^{1/2}(k)A(k)\\Q^{1/2}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S^{1/2}(k)\\0\end{bmatrix}.\tag{15}$$

式中，$\boldsymbol{Q}_1$ 是使初始阵三角化的正交阵.

通过以下四个阶段，可完成(11)～(15)递推式的并行计算.

1) 输入 $B^{\mathrm{T}}(k)$ 与图 1(a) 阵列里的 $S^{1/2}(k+1)$ 相乘,计算(11) 式.

2) $d(k)$ 的数据流与阵列左上方输入的初始值 1 在主对角线的单元上进行 QR 分解,完成(12) 式,从右下方输出 $g(k)$;旋转参数修正 $S^{1/2}(k+1)$,完成(13) 式,在阵列中得到 $S_1{}^{1/2}(k)$,对角单元输出 $f(k)$.

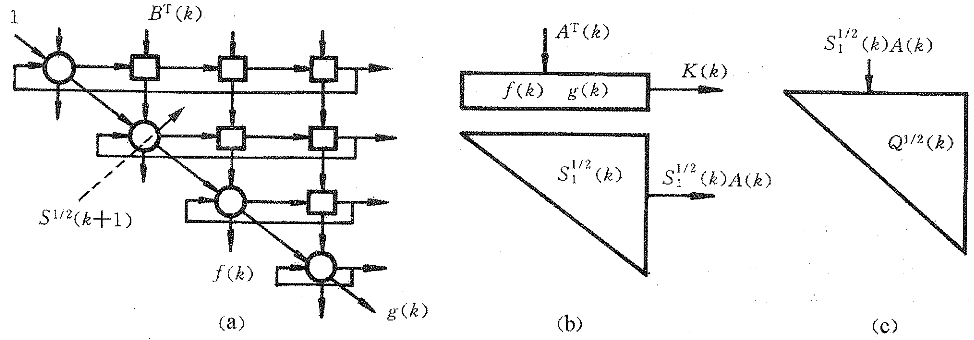


图 1 单输入情况下 LQ 优化的阵列结构简图

3) 输入 $A^{\mathrm{T}}(k)$ 至阵列,与里面 $S_1{}^{1/2}(k)$ 进行矩阵相乘,得到 $S_1{}^{1/2}(k)A(k)$;与 n 个单元组成线性阵列里的 $f(k)/g(k)$ 相乘,计算(14) 式的 $K(k)$(图 1(b)).

4) 输入 $S_1{}^{1/2}(k)A(k)$ 与阵列里的 $Q^{1/2}(k)$ 进行 QR 分解,得到(15) 式的 $S^{1/2}(k)$(图 1(c)).

整个计算过程需 $n(n+3)$ 个处理单元. 以上四个阶段在每次递推计算中,通过有效组织的数据流进程见图 2. 从图中可以看出,每个点的计算需 $3n+3$ 个计算步.

除第四阶段的 $K(k)$ 计算需 n 个单元外,各个阶段使用的处理单元均为 $n(n+1)/2$ 个;每个单元在各个阶段进行的计算步分别为 $1,1,n,n$ 个. 整个过程中处理器的利用率 $\eta=[n(n+1)+n^2(n+1)+n^2]/[(3n+3)(n+3)n/2]\times 100\%\approx 70\%$. 由此可知,处理器的利用率是很高的.

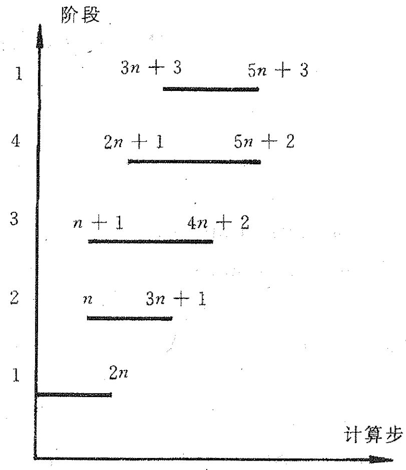
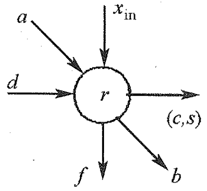
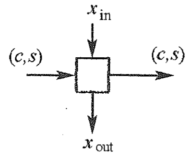


图 2 数据流进程时序

表 1 单输入情况下各阶段单元的运算功能

单元	阶段 1,3	阶段 2	阶段 4
	$s=x_{\mathrm{in}}r$	$b=\sqrt{a^2+d_{\mathrm{in}}^2}$ $c=d/b$; $s=a/b$ $f=sr+cx_{\mathrm{in}}$ $f=cr-sx_{\mathrm{in}}$	If $x_{\mathrm{in}}=0$ Then $c=1$; $s=0$ Else $r_1=\sqrt{r^2+x_{\mathrm{in}}^2}$ $c=r/r_1$; $s=x_{\mathrm{in}}/r_1$ $r=r_1$ End
	$s_{\mathrm{out}}=s_{\mathrm{in}}+x_{\mathrm{in}}r$ $x_{\mathrm{out}}=x_{\mathrm{in}}$	$x_{\mathrm{out}}=cx_{\mathrm{in}}+sr$ $r=cr-sx_{\mathrm{in}}$	$x_{\mathrm{out}}=cx_{\mathrm{in}}-sr$ $r=sx_{\mathrm{in}}+cr$

4 结 论

本文提出的两种算法可有效地求解多输入及单输入情况下的LQ优化问题,算法很容易影射到阵列结构上.在单一结构上进行多阶段运算,可减少全局通讯及硬件的需求,提高处理器的利用率.多输入及单输入情况下,每次并行计算的复杂性分别为$O(n+r)$和$O(n)$,加速了控制参数的合成.由于LQG与LQ问题的最佳控制器参数相同,可通过上述的算法和阵列结构并行计算LQG问题的控制器参数.采用平方根算法,具有良好的数值稳定性.

参 考 文 献

1 Chisci,L.. A Systolic architecture for iterative LQ optimization. Automatica,1991,27(5):799—810
2 戴冠中,佟明安.现代控制理论导论.北京:国防工业出版社,1989
3 慕德俊,戴冠中.脉动阵列执行LQ优化.控制理论及应用年会论文集,南京,1992,329—332
4 Pan,C. T.. Least squares modifications with inverse factorizations parallel implications. J. Computational and Applied Mathematics,1989,27:10—127

Parallel Methods of LQ Optimizations

MU Dejun, DAI Hang, TONG Ming'an and DAI Guanzhong
(Department of Automatic Control,Northwestern Polytechnical University · Xi'an,710072,PRC)

Abstract: In this paper,two new square-root algorithms to solve the LQ optimization problems for multiple input and single input plants are proposed based on the QR decomposition, Fadeev algorithm, least square-root inverse decomposition and matrix-matrix multiplier. The algorithms are more numerical robust and efficient to sysolic mapping and implemented by multiphase systolic arrays,which can offer the optimal feedback gain matrix and speed up parameter synthesis for controller. The processor utilization,the time-steps and the multiphase opereations are discussed.

Key words: systolic array; LQ optimization; parallel algorthm

本文作者简介

慕德俊 1963年生.教授.1983年获军械工程学院导弹专业学士学位,此后在新疆某部从事导弹业务,1990年和1994年分别获西北工业大学惯导专业硕士学位和自动控制理论及应用专业博士学位.目前在西北工业大学自动控制系工作.

戴 航 1969年生.讲师.1991年本科毕业于西北工业大学计算机系,目前为本校在职研究生.主要从事控制与计算机网络领域的研究与教学.

佟明安 1936年生.教授.火力控制专业博士导师.1961年毕业于哈尔滨军事工程学院空军工程系,中国航空学会理事兼航空武器系统专业分会主任,中国仿真学会理事,《火力与指挥控制》编委.研究方向:控制理论在火控中的应用,航空武器系统工程,多目标跟踪识别与攻击,飞机武器系统效能评估等.

戴冠中 见本刊1998年第1期第23页.