第15卷第5期
1998年10月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15, No. 5
Oct., 1998

模糊基函数网络辨识算法稳定性*

杨宜民
(广东工业大学自动化控制工程系·广州,510090)

章　云　毛宗源　周其节
(华南理工大学自动控制工程系·广州,510641)

摘要：模糊基函数网络能很好地以"if…then…"形式利用专家的知识,且以这种模型进行辨识,其辨识误差方程与辨识参数成线性关系,因而非常适用于实时辨识系统中.本文研究了这种网络模型辨识的持续激励条件和基于梯度法的辨识系统稳定性,给出了它们存在的充要条件.

关键词：模糊系统；神经网络；持续激励；稳定性

1　引　　言

近些年来,以三层前馈网络模型辨识非线性系统得到广泛应用.若三层前馈网络的输入与输出层取为线性层,隐层取为非线性层,它的输入与输出关系可表示为一组基函数的线性组合.通常采用的基函数有 Sigmoid 函数、多项式函数[1]、径向基函数[2]等,通过优化基函数中的可调参数,以使该基函数与待逼近的函数有较好的相关性,达到较好的逼近效果.但由于基函数中的可调参数是非线性的,优化过程大都是基于梯度信息的非线性寻优过程,因而难免陷入局部极小且收敛速度较慢,不宜运用于需要实时辨识的系统中.为了加快收敛速度、避免局部极值问题,可根据一定的先验知识取定基函数中的可调参数,这样只需优化这组基函数对应的组合系数.基于此,文[3]提出了一种模糊基函数网络辨识方法.由于模糊基函数能很好地以"if…then…"形式利用先验知识,因而与其它形式的基函数比较,所得到的基函数能较好地反映待辨识的系统.

对于神经网络参数的学习目前已得到了许多算法,但较少研究算法的稳定性.在线性模型的系统辨识中已经知道,为了保证辨识算法是指数收敛需要满足持续激励条件[4].从这一思想出发,本文探讨了基于模糊基函数网络模型的梯度学习算法的稳定性和它的持续激励条件.

2　问题的提出

如果模糊神经网络模型采用高斯型隶属函数、乘积推理规则、中心去模糊,则网络模型的输出与输入有如下关系[3]:

$$z_j(t) = (x(t) - m_j)^{\mathrm{T}} Q (x(t) - m_j),\ x(t), m_j \in \mathbb{R}^d,\ Q > 0 \in \mathbb{R}^{d\times d}, \tag{1a}$$

$$\xi_j(t) = \mathrm{e}^{-z_j(t)} \Big/ \sum_{j=1}^{q} \mathrm{e}^{-z_j(t)}, \tag{1b}$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{q} \xi_j(t)\theta_j = \xi^{\mathrm{T}}(t)\theta,\quad \xi(t), \theta \in \mathbb{R}^q. \tag{1c}$$

其中 $x(t) \in \mathbb{R}^d$ 是模型的输入,$y(t) \in \mathbb{R}$ 是模型的输出.$\xi_j(t)\{j = 1,2,\cdots,q\}$ 称为模糊基函数.设待辨识的系统为:

$$y_p(t) = f(x(t)) = \xi^{\mathrm{T}}(t)\theta^* + \varepsilon(t). \tag{2}$$

其中 $\varepsilon(t)$ 为模型残差,$x(t), y_p(t)$ 为连续的可量测的量,它们之间满足某种微分关系,且是输入输出稳定,即满足如下条件.

---

* 广东省自然科学基金项目(960101)和国家攀登计划认知科学(模糊神经网络)重大攻关项目资助课题.
本文于1997年4月11日收到.1997年9月10日收到修改稿.

条件 1 $x(t) \in L_\infty^d$, $x(t) \in C^d(0,\infty)$, $y_p(t) \in L_\infty$.

若以式(1)作为辨识模型,则辨识误差为

$$e(t) = y(t) - y_p(t) = \xi^{\mathrm{T}}(t)(\theta - \theta^*) - \varepsilon(t). \tag{3}$$

若参数 θ 按梯度法学习,即

$$\dot{\theta}(t) = - g\xi(t)e(t), \quad g > 0. \tag{4}$$

取 $\beta(t) = \theta(t) - \theta^*$,则辨识系统的微分方程:

$$\dot{\beta}(t) + g\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\beta(t) = g\xi(t)\varepsilon(t), \tag{5a}$$

$$e(t) = \xi(t)\beta(t) - \varepsilon(t). \tag{5b}$$

定义 1 持续激励条件,若 $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\delta > 0$,使得

$$\alpha_2 I \geqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} \xi(t)\xi(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha_1 I, \quad \forall\ t_0 \in [0,\infty). \tag{6}$$

引理 1[4] 若 $\xi(t)$ 满足持续激励条件,则齐次方程(7)的解是指数衰减的.

$$\dot{\beta}(t) + g\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\beta(t) = 0. \tag{7}$$

这样,就需要讨论模糊基函数在什么条件下能满足持续激励条件,进而保证辨识系统(5)是稳定的.

3 持续激励条件与辨识系统稳定性

定义 2 若 $\sum_{j=1}^{q}\xi_j(t)\alpha_j = 0\{t \in [t_0,t_0+\delta]\}$ 当且仅当 $\alpha_j = 0\{j = 1,2,\cdots,q\}$,则称 $\xi_j(t)$ 在 $[t_0,t_0+\delta]$ 线性独立.

若 $\lim\limits_{t\to\infty}\sum_{j=1}^{q}\xi_j(t)\alpha_j = 0$ 当且仅当 $\alpha_j = 0\{j = 1,2,\cdots,q\}$,则称 $\xi_j(t)$ 在无穷远线性独立.

若存在 δ,对 $\forall\ t_0 \in [0,\infty)$ 和无穷远,$\xi_j(t)\{j = 1,2,\cdots,q\}$ 都是线性独立,则称其为一致线性独立.

引理 2 下列说法是等价的:

1) $\xi_j(t)\{j = 1,2,\cdots,q\}$ 在$[t_0,t_0+\delta]$ 线性独立;

2) 存在 $\alpha_1 > 0$,使得 $\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha_1 I$.

证 假定 2) 成立而 1) 不成立,那么存在不全为 0 的常向量 θ 满足 $\xi^{\mathrm{T}}(t)\theta = 0$,从而

$$\theta^{\mathrm{T}}\left[\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t\right]\theta = \int_{t_0}^{t_0+\delta}(\xi^{\mathrm{T}}(t)\theta)^2\mathrm{d}t = 0. \tag{8}$$

由于 2)成立,矩阵 $\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t$ 一定是正定阵,故引起矛盾.

假定 1) 成立而 2) 不成立,即矩阵 $\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t$ 不是正定阵而是半正定阵,那么存在不全为 0 的常向量 θ 使得式(8) 成立,进而推出 $\xi^{\mathrm{T}}(t)\theta = 0$,这与假设 1) 成立是矛盾的.

定理 1 $\xi(t)$ 满足持续激励条件当且仅当 $\xi_j(t) \in L_\infty\{j = 1,2,\cdots,q\}$ 是一致线性独立.

证 1) 显见,$\exists\ \alpha_2 > 0, \forall\ t_0 \in [0,\infty)$,

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t \leqslant \alpha_2 I \text{ 当且仅当 } \xi_j(t) \in L_\infty\{j = 1,2,\cdots,q\}.$$

2) 假定 $\xi_j(t) \in L_\infty\{j = 1,2,\cdots,q\}$ 是一致线性独立,而不存在 $\alpha_1 > 0$ 使得 $\int_{t_0}^{t_0+\delta}\xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t$

$\geqslant \alpha_1 I$.

从引理2知，若 t_0 为有限值总是可以找到 $\alpha_1 > 0$ 使得 $\int_{t_0}^{t_0+\delta} \xi(t)\xi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t \geqslant \alpha_1 I$. 若这样的 $\alpha_1 > 0$ 对 $\forall\, t_0 \in [0,\infty)$ 不存在，必有 $\theta \neq 0$ 使得

$$\lim_{t_0\to\infty}\int_{t_0}^{t_0+\delta}(\xi^{\mathrm{T}}(t)\theta)^2\mathrm{d}t = 0,$$

也就是
$$\lim_{t_0\to\infty}\int_0^{\delta}(\xi^{\mathrm{T}}(t_0+\delta-\tau)\theta)^2\mathrm{d}\tau = \int_0^{\delta}\lim_{t_0\to\infty}(\xi^{\mathrm{T}}(t_0+\delta-\tau)\theta)^2 = 0.$$

而这与 $\xi_j(t) \in L_\infty\{j=1,2,\cdots,q\}$ 一致线性独立是矛盾的. 反之亦然.

要求 $\xi_j(t) \in L_\infty\{j=1,2,\cdots,q\}$ 是一致线性独立的物理意义是很明确的，即要求它的瞬态分量和稳态分量都要相互独立. 为了使下面的描述更为方便，以 $z_\infty(t)$ 记 $z(t)$ 的稳态分量.

引理 3 $\{e^{-z_j(t)}, j=1,2,\cdots,q\}$ 是线性独立的当且仅当 $z_i(t)-z_j(t)\neq c_{ij}, \forall\, i\neq j$. c_{ij} 是常数.

证 如果 $z_i(t)-z_j(t)\neq c_{ij}, \forall\, i\neq j$, 对于方程

$$\sum_{j=1}^{q}\theta_j\mathrm{e}^{-z_j(t)} = 0. \tag{9}$$

两边同时乘以 $\mathrm{e}^{z_i(t)}$

$$\theta_i + \sum_{j\neq i}\theta_j\mathrm{e}^{-(z_j(t)-z_i(t))} = 0. \tag{10}$$

推出 $\theta_i = 0$. 由于 i 的任意性，故 $\{\mathrm{e}^{-z_j(t)}, j=1,2,\cdots,q\}$ 是线性独立的. 充分条件得证.

另一方面，如果某组 $z_i(t)-z_j(t)=c_{ij}$，从式(10)知可找到不全为0的常数 $\{\theta_j, j=1,2,\cdots,q\}$ 使得式(9)成立. 故必要条件得证.

定理 2 如果条件1存在，且对 $\forall\, i\neq j, z_i(t)-z_j(t)\neq c_{ij}, z_{\infty i}(t)-z_{\infty j}(t)\neq d_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ 是常数. 则辨识系统(5)是指数稳定的.

证 因为条件1存在，则有 $z_j(t)\in L_\infty, \xi_j(t)\in L_\infty, \varepsilon(t)\in L_\infty, j=1,2,\cdots,q$. 另外 $\forall\, i\neq j, z_i(t)-z_j(t)\neq c_{ij}, z_{\infty i}(t)-z_{\infty j}(t)\neq d_{ij}$，根据引理3知 $\{\xi_j(t)\in L_\infty, j=1,2,\cdots,q\}$ 是一致线性独立的，从而 ξt 满足持续激励条件. 由引理1可得到方程(5)是指数稳定的.

4 结束语

模糊基函数网络能很好地以“if…then…”形式利用专家的知识. 且以这种模型进行辨识，其辨识误差方程与辨识参数成线性关系，因而非常适用于实时辨识系统中. 本文研究了这种网络模型辨识的持续激励条件和基于梯度法的辨识系统稳定性，给出了它们存在的充要条件.

参考文献

1 Chen, S., Billings, S. A. and Luo, W.. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification. Int. J. Control, 1989, 50(5): 1873—1896

2 Chen, S., Cowan, C. F. N. and Grant, P. M.. Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks. IEEE Trans. Neural Network, 1991, 2(2): 302—309

3 王立新. 自适应模糊系统与控制. 北京：国防工业出版社，1995

4 Sastry, S. and Bodson, M.. Adaptive Control: Stability, Convengence, Robustness. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989

5 Lin, C. T.. Neural Fuzzy Control Systems with Structure and Parameter Learning. Singapore: World Scientific, 1994

Identification Stability on Fuzzy Basis Function Network

YANG Yimin

(Research Insititute of Automation, Guangdong University of Technology · Guangzhou, 510090, PRC)

ZHANG Yun, MAO Zongyuan and ZHOU Qijie

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology · Guangzhou, 510641, PRC)

Abstract: Linguistic fuzzy IF-THEN rules can often be obtained from human experts who are familiar with the system under consideration. A fuzzy basis function relates to a linguistic fuzzy IF-THEN rule. In addtion, this fuzzy basis function expansion is linear in its adjustable parameters. Therefore, The fuzzy basis function network is fit to be used as an adaptive identifier. This paper deals with the identification stability. A persistently exciting condition must be satisfied in order to guarantee parameter convengence in the adaptive identifier. Moreover, a sufficient and necessary test between the persistently exciting condition and fuzzy basis functins is given.

Key words: fuzzy system; neural network; persistency of excition; stability

本文作者简介

杨宜民 见本刊 1998 年第 1 期第 151 页.

章 云 见本刊 1998 年第 1 期第 151 页.

毛宗源 见本刊 1998 年第 1 期第 151 页.

周其节 见本刊 1998 年第 1 期第 38 页.