第15卷第6期
1998年12月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 15,No.
Dec.,199

一类二维临界非线性系统的稳定性判别*

李春文　张平　乔岩

（清华大学自动化系·北京，100084）

摘要：利用一种判别系统稳定性的定号导函数方法——正则判别函数法，结合Normal Form理论，对二维三次非线性系统的两种临界情形进行了稳定性分析，即对含一对纯虚根和含几何重数为一的两个零根的纯临界系统，分别给出了一组系统稳定的充分条件，并给出了相应的李亚普诺夫函数的形式.

关键词：稳定性；正则判别函数法；临界系统

1　前　言

临界非线性系统的稳定性判别是稳定性研究的一个基本课题. 二维平面系统是简单而又十分重要的系统. 另外，高维系统的稳定性又往往可利用分解或中心流形定理，转化为研究二维系统的稳定性[1]. 因而，对二维平面系统的稳定性讨论十分有意义. 王联，王慕秋[2]对二维二次系统进行了完整的分析. 张芷芬等[3]对二维二次系统给出了一些比较简便的原点稳定的充分条件. 本文讨论二维三次非线性系统，利用正则判别函数法，对两种临界情形的稳定性进行了分析. 通过例子说明，所得判据是简明有效，便于使用的.

2　正则判别函数法

研究稳定性的主要方法是李亚普诺夫第二方法. 李亚普诺夫第二方法的关键和难点在于李亚普诺夫函数的构造. 可以将构造李亚普诺夫函数的方法按其出发点分为两类. 第一类是由定号的 $V(X)$ 出发，计算其沿系统的时间导数 $\dot{V}(X)$，然后根据 $V(X)$ 和 $\dot{V}(X)$ 的符号性质判别其稳定性. 该方法需多次试凑. 而且，由定号的 $V(X)$ 出发，限制了可判系统的范围. 例如，对不稳定系统，使用第一类方法，由定号的 $V(X)$ 出发时，原本就不一定存在使 $\dot{V}(X)$ 定号的 $V(X)$. 第二类是由定号的导函数 $\dot{V}(X)$ 出发，即先构造出满足 $\dot{V}(X)$ 定号的函数 $V(X)$，然后根据 $V(X)$ 的符号性质判别其稳定性. 由于沿第二类途径发展起来的早期的一些方法，如变量梯度法，需求解难度较大的旋度方程，削弱了其有效性. 然而，沿第二类研究途径可以将渐近稳定和不稳定两种情形放在一起考察，仍有进一步的研究价值. 在这一方向上，文献[4]给出了一个新的定理：

定理1[4]　对系统 $\dot{X}=f(X)$，其中，$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是连续可微的，$f(0)=0$，如果能找到连续可微函数 $V(X)$，$V(0)=0$，使得 $V(X)$ 由系统构成的全导数 $\dot{V}(X)$ 是定号的，则当 $V(X)$ 是与 $\dot{V}(X)$ 的正负号相反的定号函数时，系统的平衡点是渐近稳定的，否则（即当 $V(X)$ 不是与 $\dot{V}(X)$ 的正负号相反的定号函数时），该平衡点是不稳定的.

定理1将李亚普诺夫渐近稳定定理与不稳定定理合而为一，以一种统一的形式给出. 因此，一旦得到定号的 $\dot{V}(X)$，则就可以根据 $V(X)$ 的符号对系统的稳定性做出彻底的判断.

---

* 国家自然科学基金(69774011)、国家教委博士点基金(96000367)、清华大学基础研究基金(XJ－28)资助课题.

本文于1997年1月29日收到. 1997年10月30日收到修改稿.

由于解算 $V(X)$ 时首先只需考虑 $V(X)$ 沿轨线导数的符号，而不用考虑 $V(X)$ 的符号，因而约束减少.

为方便讨论，称导函数定号的 $V(X)$ 为正则判别函数，用正则判别函数判别系统稳定性的这一方法称为正则判别函数法.

进一步，本文考虑采用系数直接选取的方法来构造正则判别函数. 它的要点是直接设定 $V(X)$ 的一个多项式形式，然后通过选取 $V(X)$ 的系数，使得 $\dot{V}(x)$ 定号. 利用这种方法判别系统的稳定性的步骤为：① 用待定系数法设多项式函数 $V(X)$；② 求出 $\dot{V}(X)$ 的表达式；③ 适当选取 $V(X)$ 的系数，使 $\dot{V}(X)>0$；④ 根据 $V(X)$ 的符号性质，判断系统的稳定性.

下面两节中，我们给出利用正则判别函数法分析二维三次临界系统的稳定性的结果.

3 含一对纯虚根的情形

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x}=y+f_{xx}x^2+f_{xy}xy+f_{yy}y^2+f_{xxx}x^3+f_{xxy}x^2y+f_{xyy}xy^2+f_{yyy}y^3+O(|(x,y)|^4), \\ \dot{y}=-x+g_{xx}x^2+g_{xy}xy+g_{yy}y^2+g_{xxx}x^3+g_{xxy}x^2y+g_{xyy}xy^2+g_{yyy}y^3+O(|(x,y)|^4). \end{cases} \tag{1}$$

针对系统(1)，取

$$V(X)=V_2(X)+V_3(X)+V_4(X).$$

其中 V_2,V_3,V_4 分别表示 X 的 2,3,4 齐次多项式，$X=(x,y)^{\mathrm{T}}$.

记 $$\dot{V}(X)=\frac{\partial V}{\partial X}\dot{X}=\dot{V}_2(X)+\dot{V}_3(X)+\dot{V}_4(X)+O(|X|^5).$$

令 $$\dot{V}_2(X)=0,\quad \dot{V}_3(X)=0,\quad \dot{V}_4(X)>0.$$

取 $$\dot{V}(x,y)=2h(x^4+y^4)+O(|(x,y)|^5).$$

其中，$h=-f_{xy}(f_{yy}+f_{xx})+g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})+2(f_{xx}g_{xx}-f_{yy}g_{yy})+f_{xyy}+g_{xxy}+3(f_{xxx}+g_{yyy})$. 可求得

$$\begin{aligned} V(x,y)=&6x^2+6y^2+(-4f_{xx}-8g_{yy}-4g_{xx})x^3+12f_{xx}x^2y-12g_{yy}xy^2+(4f_{yy}+8f_{xx}+4g_{xy})y^3 \\ &+(3f_{xy}^2-6f_{xx}^2-3f_{xxy}+6f_{xy}g_{yy}-3f_{xx}g_{xy}+3f_{xy}g_{yy}+6g_{yy}g_{xx}-3g_{xxx})x^4 \\ &+(2f_{yy}f_{xy}-2f_{xyy}-10f_{xy}f_{xx}+6f_{xxx}+4f_{yy}g_{yy}-24f_{xx}g_{yy}-6g_{yyy} \\ &-2g_{yy}g_{xy}-4f_{xx}g_{xx}-2g_{x2y}g_{xx}-2g_{xxy})x^3y \\ &+(-2f_{yy}f_{xy}+2f_{xyy}-2f_{xy}f_{xx}+6f_{xxx}-4f_{yy}g_{yy}-24f_{xx}g_{yy}-6g_{yyy} \\ &-10g_{yy}g_{xy}+4f_{xx}g_{xx}+2g_{xy}g_{yy}+2g_{xxy})xy^3 \\ &+(3f_{yyy}+6f_{yy}f_{xx}-3f_{xy}g_{yy}-6g_{yy}^2+3f_{xx}g_{xy}+3g_{xy}^2+3g_{xyy})y^4 \\ >&0. \end{aligned}$$

从而，当 $h\neq 0$ 时，$V(x,y)$ 就是一个正则判别函数. 当 $h<0$ 时，系统渐近稳定；$h>0$ 时，系统不稳定. 即有如下定理.

定理 2 系统(1)中，记 $h=-f_{xy}(f_{yy}+f_{xx})+g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})+2(f_{xx}g_{xx}-f_{yy}g_{yy})+f_{xyy}+g_{xxy}+3(f_{xxx}+g_{yyy})$. 如果 $h<0$，则系统(1)渐近稳定；如果 $h>0$，则系统(1)不稳定.

文献[1]给出了如下系统的稳定性判据. 该系统是系统(1)的特殊情形.

$$\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x+g_{xx}x^2+g_{xy}xy+g_{yy}y^2+g_{xxx}x^3+g_{xxy}x^2y+g_{xyy}xy^2+g_{yyy}y^3+O(|(x,y)|^4). \end{cases}$$

4 含几何重数为一的两个零根的情形

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y + f_{xx}x^2 + f_{xy}xy + f_{yy}y^2 + f_{xxx}x^3 + f_{xxy}x^2y + f_{xyy}xy^2 + f_{yyy}y^3 + O(|(x,y)|^4) \\ \dot{y} = g_{xx}x^2 + g_{xy}xy + g_{yy}y^2 + g_{xxx}x^3 + g_{xxy}x^2y + g_{xyy}xy^2 + g_{yyy}y^3 + O(|(x,y)|^4). \end{cases} \tag{2}$$

利用 Normal Form 技术，可将系统(2)转化成具有下列形式的五次系统[5]：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + O(|(x_1,x_2)|^6), \\ \dot{x}_2 = \delta_1 x_1{}^2 + \delta_2 x_1 x_2 + \delta_3 x_1^3 + \delta_4 x_1^2 x_2 + \delta_5 x_1^4 + \delta_6 x_1^3 x_2 + \delta_7 x_1^5 + \delta_8 x_1^4 x_2 + O(|(x_1,x_2)|^6) \end{cases} \tag{3}$$

其中，x_1,x_2 是变化后的状态，$\delta_i (i=1,\cdots,8)$ 是常数.

为了采用正则判别函数法判定系统(3)的稳定性，我们先考虑如下函数的局部定号性.

定理 3 标量函数

$$\begin{aligned} V(x_1,x_2) = {} & v_{02}x_2^2 + v_{12}x_1x_2^2 + v_{03}x_2^3 + x_{40}x_1^4 + v_{31}x_1^3x_2 + v_{22}x_1^2x_2^2 \\ & + v_{13}x_1x_2^3 + v_{40}x_2^4 + v_{05}x_1^5 + v_{60}x_1^6. \end{aligned} \tag{4}$$

如果满足 $v_{02},v_{40} > 0$，则 $V(x_1,x_2)$ 在原点附近局部正定.

定理 3 是文献[6]中定理 1 的一个推论. 证明见文献[6].

定理 4 标量函数

$$V(x_1,x_2) = x_2^4(\delta_1 + \rho_1(x_1,x_2)) + x_1^2x_2^2(\delta_2 + \rho_2(x_1,x_2)) + \delta_3 x_1^6 + O(|(x_1,x_2)|^6). \tag{5}$$

如果 $\delta_i < 0 (i=1,2,3)$，ρ_i 为光滑标量函数，且 $\rho_i(0,0)=0\ (i=1,2)$，则 $V(x_1,x_2)$ 在原点附近局部负定.

定理 4 的结论显然成立.

针对系统(3)，我们设 $V(X)$ 如式(4)，则有

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) = {} & 2v_{02}\delta_1 x_1^2 x_2 + 2v_{02}\delta_2 x_1 x_2^2 + (4v_{40} + 2v_{02}\delta_3)x_1^3x_2 + (3v_{31} + 2v_{02}\delta_4)x_1^2x_2^2 + v_{13}x_2^4 \\ & + (5v_{50} + 2v_{02}\delta_5)x_1^4x_2 + (6v_{60} + v_{31}\delta_4 + 2v_{02}\delta_7)x_1^5x_2 + v_{31}\delta_3x_1^6 + x_1^2x_2^2\rho_2(x_1,x_2) \\ & + x_2^4\rho_1(x_1,x_2). \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\rho_1(x_1,x_2) = 4v_{04}\delta_2x_1 + 4v_{04}\delta_4x_1^2 + 4v_{04}\delta_6x_1^3 + 4v_{04}\delta_8x_1^4$,

$$\begin{aligned} \rho_2(x_1,x_2) = {} & 3v_{13}\delta_1x_1 + 4v_{04}\delta_1x_2 + 3v_{13}\delta_2x_2 + 3v_{13}\delta_3x_1^2 + 4v_{04}\delta_3x_1x_2 + 3v_{03}\delta_3x_1 \\ & + 2v_{12}\delta_4x_1 + 3v_{03}\delta_4x_2 + 2v_{22}\delta_4x_1^2 + 3v_{13}\delta_4x_1x_2 + 3v_{03}\delta_5x_1^2 + 3v_{13}\delta_5x_1^3 \\ & + 4v_{04}\delta_5x_1^2x_2 + 2v_{02}\delta_6x_1 + 2v_{12}\delta_6x_1^2 + 3v_{01}\delta_6x_1x_2 + 2v_{22}\delta_6x_1^3 \\ & + 3v_{13}\delta_6x_1^2x_2 + 3v_{03}\delta_7x_1^3 + 3v_{13}\delta_7x_1^4 + 4v_{04}\delta_7x_1^3x_2 + 2v_{02}\delta_8x_1^2 \\ & + 2v_{12}\delta_8x_1^3 + 3v_{03}\delta_8x_1^2x_2 + 2v_{22}\delta_8x_1^4 + 3v_{13}\delta_8x_1^3x_2. \end{aligned}$$

由定理 4 知，如果满足下列条件，则 $\dot{V}(X)$ 局部负定.

$$\begin{cases} ① \ v_{02}\delta_1 = 0, v_{02}\delta_2 = 0, 4v_{40} + 2v_{02}\delta_3 = 0, \\ \quad 5v_{50} + 2v_{02}\delta_5 = 0, 6v_{60} + 3v_{31}\delta_4 + 2v_{02}\delta_7 = 0. \\ ② \ 3v_{31} + 2v_{02}\delta_4 < 0, v_{13} < 0, v_{31}\delta_3 < 0. \end{cases} \tag{7}$$

假设 $\dot{V}(X)$ 局部负定，即满足条件(7). 下面分情况分析 $V(X)$ 的各系数，并判别系统的稳定性.

情形 1　　$\delta_1 = \delta_2 = 0$.

取 $v_{02} = 1$,则 $v_{40} = -\delta_3/2$,分别讨论 δ_3,δ_4 的情形.

1) $\delta_3 < 0, \delta_4 < 0$ 时,由 ②$v_{31} < -2\delta_4/3$ 且 $v_{31}\delta_3 < 0 \Rightarrow 0 < v_{31} < -2\delta_4/3$,$v_{31}$ 有解.根据条件(7)可以找到使 $\dot{V}(x)$ 负定的 $V(X)$.此时,因为 $v_{02} > 0, v_{40} > 0$,所以 $V(X)$ 正定,系统(2)渐近稳定.

2) $\delta_3 < 0, \delta_4 > 0$ 时,v_{31} 无解,不存在如形式(4)的正则判别函数.

3) $\delta_3 > 0$ 时,由 $v_{31} < -2\delta_4/3$ 且 $v_{31}\delta_3 < 0 \Rightarrow v_{31} < \min\{-2\delta_4/3, 0\}$,可以找到使 $\dot{V}(x)$ 负定的 $V(X)$.此时,$V(X) = x_2^2 + v_{12}x_1x_2^2 + v_{03}x_2^3 + v_{40}x_1^4 + v_{31}x_1^4 + v_{31}x_1^3x_2 + v_{22}x_1^2x_2^2 + v_{13}x_1x_2^3 + v_{04}x_2^4 + O(x_1,x_2)^4$,$V(x_1,0) = v_{40}x_1^4 < 0$,$V(0,x_2) = x_2^2 > 0$ 不正定,系统(3)不稳定.

情形 2　δ_1,δ_2 不同时等于 0.

则 $v_{02} = v_{40} = v_{50} = 0$,这时讨论 δ_3 的情形.

1) $\delta_3 > 0$ 时,根据条件(7)可以找到使 $\dot{V}(x)$ 负定的 $V(X)$.此时,$V(X) = v_{12}x_1x_2^2 + v_{03}x_2^3 + O(|(x_1,x_2)|^4) = (v_{12}x_1 + v_{03}x_2)x_2^2 + O(|(x_1,x_2)|^4)$,不正定,系统(2)不稳定.

2) $\delta_3 < 0$ 时,v_{31} 无解,不存在如形式(4)的正则判别函数.

总结上述过程得到如下定理.

定理 5　系统(3)中,如果 $\delta_1 = \delta_2 = 0, \delta_3, \delta_4 < 0$,则系统(3)渐近稳定;如果 $\delta_3 > 0$,则系统(3)不稳定.

针对系统(2),有以下推论.

推论 1　对系统(2),如果 $g_{xx} = 0, g_{xy} + 2f_{xx}^2 = 0, g_{xxx} + 2f_{xx}^2 < 0, g_{xxy} + 3f_{xxx} - f_{xx}(f_{xy} + 2g_{yy}) < 0$,则系统(2)渐近稳定.如果 $g_{xxx} + 2f_{xx}^2 > 0$,则系统(2)不稳定.

此稳定性判据与文献[5]的一致.定理 5 和推论 1 的结果同时包含了系统不稳定的判据.

5　举　　例

例 1　判断系统的稳定性.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = -x + y^3. \end{cases}$$

根据定理 2,$h = -1 + 3(-1+1) = -1 < 0$,所以系统渐近稳定.

例 2[7]　判断系统的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$$

这是文献[7]中第 56 页的一个例子.根据推论 1,$g_{xx} = 0, g_{xy} + 2f_{xx}^2 = 0, g_{xxx} + 2f_{xx}^2 = -1 < 0, g_{xxy} + 3f_{xxx} - f_{xx}(f_{xy} + 2g_{yy}) = -3 < 0$,所以,系统渐近稳定.

例 3　判断系统的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x} = y + x^2, \\ \dot{y} = -x^2 - xy - x^3. \end{cases}$$

根据推论 1,$g_{xxx} + 2f_{xx}^2 = 1 > 0$,所以系统不稳定.

6　总　　结

本文利用一种判别系统稳定性的定号导函数方法——正则判别函数法,结合 Normal Form 理论,对二维三次非线性临界系统进行了稳定性分析,给出了一组判别系统稳定性的充

分条件.稳定性的充分条件对于控制器的设计十分有意义.同时,本文给出了系统的一个李普诺夫函数的形式,在设计控制律时可起到指导作用.

参考文献

1 Aeyels, D.. Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control. Systems and Control Lette 1985, 5(4): 289—294

2 王联,王慕秋.论 $n=2$ 情形下的 V. I. Arnold 问题.科学通报,1979,24(6):324—347

3 张芷芬.微分方程定性理论.北京:科学出版社,1985

4 李春文.关于 Liapunov 不稳定定理的一个注记.全国第四届非线性动力学与稳定性学术会议论文集.北京:中国科学术出版社,1995,164

5 Liaw, D. C. and Liang, Y. W.. Stabilization of Nonlinear Systems in Compound Critical Cases. Proceedings of the f Chinese World Congress on Intelligent Control and Intelligent Automation, Beijing: Science Press, 1993, 2325—2330

6 Fu, J. H. and Abed, E. H.. Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases. IEEE Trans. Autom Contr., 1993, AC-38(1): 3—16

7 高为炳.运动稳定性基础.北京:高等教育出版社,1987

Sufficient Conditions for Stability of a Class of Two-Dimensional Critical Nonlinear Systems

LI Chunwen, ZHANG Ping and QIAO Yan

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, PRC)

Abstract: This paper analyses the stability of two-dimensional three-degree critical nonlinear systems using the Normal Determinative Function Method, which is a definite derivative function method to ju Lyapunov stability of systems. Two cases are considered, where the pure critical system has a pair of nonz pure imaginary eigenvalues and two zero eigenvalues with geometric multiplicity one. For each system, sufficient conditions for stability and the form of Lyapunov function are given.

Key words: stability; normal determinative function method; critical system

本文作者简介

李春文 1958年生.1982年、1989年于清华大学获得学士、博士学位,现为清华大学教授,博士生导师.主要研究兴为:自动控制理论及应用,非线性控制的逆系统方法,非线性系统仿真及符号CAD,稳定性的正则判别函数法.

张 平 1971年生.分别于1994年和1997年在清华大学自动化系获得学士、硕士学位.现为电力部南京电力自动化究院工程师.主要研究兴趣为非线性系统稳定性,逆系统方法,控制系统CAD,电力系统自动化,计算机网络应用.

乔 岩 1973年生.1996年在清华大学应用数学系获得学士学位.现在美国华盛顿大学攻读博士学位.主要研究兴为:非线性系统稳定性,非线性控制系统设计,非线性动力系统,符号计算等.