

# 基于 Tank-Hopfield 神经网络的有约束多变量广义预测控制器

陈增强 赵天航 袁著社

(南开大学计算机与系统科学系·天津, 300071)

**摘要:** 通过对系统的信号约束, 构成有约束多变量广义预测控制问题, 并运用 T-H 优化神经网络来求解这一复杂的优化问题. 在求解过程中, 有约束广义预测控制的求解被转化为一个 T-H 优化电路网络的稳态解. 因此可以通过硬件电路或龙格-库塔数值方法进行求取. 在一个工业过程模型上的仿真研究证明了这一方法是非常有效的.

**关键词:** 神经网络; T-H 网络; 预测控制; 多变量控制; 二次优化

## 1 引言

广义预测控制(GPC)<sup>[1]</sup>是一种宜于复杂工业过程的鲁棒算法. 它通常包含着对系统的输出信号及输入信号的约束而构成有约束的优化问题. 目前人们常采用非线性规划的方法来求解这一特定问题, 存在着收敛过慢甚至不收敛等问题. 神经网络具有神经元之间的互连分布动态存贮和并行方式处理信息, 所以为求解优化问题提供了广阔的前景<sup>[2~4]</sup>. 神经优化的计算步骤为:

- 1) 选择一合适的问题表示方法, 使神经元的输出与问题的解彼此对应;
- 2) 构造能量函数, 使其最小值对应于问题的最优解;
- 3) 设计相应的神经网络和电路方程;
- 4) 进行硬件电路求解或计算机仿真求解.

本文首先设计了对系统的输入、输入增量、输出预测和输出预测增量进行约束的广义预测控制器, 然后利用 Tank-Hopfield 神经网络, 即 T-H 网络设计了求解这一复杂问题的优化求解电路及方程. 并利用四阶龙格-库塔方法进行了该问题的数值求解. 在过程模型上的仿真验证了该方法不仅能较快地求到可行的局部最优值, 而且具有良好的数值稳定性.

## 2 无约束多变量广义预测控制

假设系统基于下面的离散时间模型

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t)/\Delta, \quad \Delta = 1 - q^{-1}. \quad (1)$$

其中  $y(t)$ ,  $u(t)$  和  $\xi(t)$  分别是系统的  $m$  维输出、 $p$  维输入和  $m$  维白噪声向量. 并且

$$A(q^{-1}) = I + A_1q^{-1} + \dots + A_naq^{-na},$$

$$B(q^{-1}) = B_0 + B_1q^{-1} + \dots + B_nq^{-nb},$$

$$C(q^{-1}) = I + C_1q^{-1} + \dots + C_nq^{-nc}.$$

$A_i$  和  $B_i$  为  $m \times m$  和  $m \times p$  阶矩阵,  $C_i$  为  $m \times m$  阶对角阵.

目标函数为

$$J = \sum_{j=1}^N \|\hat{y}(t+j) - w(t+j)\|_k^2 + \sum_{j=1}^N \|\Delta\hat{y}(t+j) - \Delta w(t+j)\|_k^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \|\Delta u(t+j-1)\|_l^2. \quad (2)$$

式中  $\hat{y}(t+j)$  是对  $y(t+j)$  的预测,  $N$  和  $Nu$  分别为预测步长和控制步长,  $\|V\|_H^2$  表示  $V^T Q$  和  $R$  为  $m$  阶半正定阵, 通常取为对角阵.  $\{w(t+j)\}$  是设定值的柔化序列, 由下式产生

$$\begin{cases} w(t) = y_r(t), \\ w(t+j) = \alpha w(t+j-1) + (1-\alpha)y_r(t) \quad j = 1, \dots, N. \end{cases}$$

其中  $0 \leq \alpha < 1$  为柔化因子,  $y_r(t)$  为  $m$  维设定值向量.

引入下面两组丢番图方程

$$\begin{aligned} C &= E_j \Delta A + q^{-j} F_j, \quad j = 1, \dots, N, \\ E_j B &= G_j C + q^{-j} H_j, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} E_j &= E^{(0)} + E^{(1)}q^{-1} + \dots + E^{(j-1)}q^{-(j-1)}, \quad F_j = F_j^{(0)} + F_j^{(1)}q^{-1} + \dots + F_j^{(na)}q^{-na}, \\ G_j &= G^{(0)} + G^{(1)}q^{-1} + \dots + G^{(j-1)}q^{-(j-1)}, \quad H_j = H_j^{(0)} + H_j^{(1)}q^{-1} + \dots + H_j^{(nb-1)}q^{-(nb-1)} \end{aligned}$$

这里  $E^{(i)}$  和  $F_j^{(i)}$  是  $p$  阶方阵,  $G^{(i)}$  和  $H_j^{(i)}$  是  $p \times m$  阶矩阵.

定义

$$Y = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \vdots \\ \Delta u(t+Nu-1) \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u(t+Nu-1) \end{bmatrix}.$$

则可以得到预测向量为

$$Y = GU + \Theta \Phi(t).$$

其中

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G^{(0)} & \dots & 0 \\ G^{(1)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & G^{(0)} \\ \vdots & & G^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ G^{(N-1)} & \dots & G^{(N-Nu)} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(t) = [\Delta u(t-1)^T, \dots, \Delta u(t-nb)^T, y(t)^T, \dots, y(t-na)^T]^T,$$

$$\theta_j = [H_j^{(0)}, H_j^{(1)}, \dots, H_j^{(nb-1)}, F_j^{(0)}, \dots, F_j^{(na)}].$$

同理可得预测增量向量为

$$\bar{Y} = \bar{G}U + \bar{\Theta}\Phi(t).$$

其中

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \Delta \hat{y}(t+1) \\ \Delta \hat{y}(t+2) \\ \vdots \\ \Delta \hat{y}(t+N) \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ \Delta \theta_N \end{bmatrix},$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G^{(0)} & \dots & 0 \\ G^{(1)} - G^{(0)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & G^{(0)} \\ \vdots & & G^{(1)} - G^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ G^{(N-1)} - G^{(N-2)} & \dots & G^{(N-Nu)} - G^{(N-Nu-1)} \end{bmatrix}.$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta \hat{y}(t+j) &= \hat{y}(t+j) - \hat{y}(t+j-1), j > 1, \quad \Delta \hat{y}(t+1) = \hat{y}(t+1) - y(t), \\ \Delta \theta_j &= \theta_j - \theta_{j-1}, \quad j > 1, \quad \Delta \theta_1 = \theta_1 - \theta_*, \\ \theta_* &= [0 \cdots 0 \ I \cdots 0]. \end{aligned}$$

将(2)式写成向量形式

$$J = \|Y - W\|_{\bar{R}}^2 + \|\bar{Y} - \bar{W}\|_{\bar{Q}}^2 + \|U\|_I^2, \quad (8)$$

其中

$$W = \begin{bmatrix} w(t+1) \\ \vdots \\ w(t+N) \end{bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{bmatrix} \Delta w(t+1) \\ \vdots \\ \Delta w(t+N) \end{bmatrix},$$

$$\bar{R} = \text{diag}(R \cdots R), \quad \bar{Q} = \text{diag}(Q \cdots Q).$$

将(6)和(7)代入(8)式,并令  $\partial J / \partial U = 0$ , 得控制律

$$(G^T \bar{R} G + \bar{G}^T \bar{Q} \bar{G} + I)U = G^T \bar{R}(W - \Theta \Phi(t)) + \bar{G}^T \bar{Q}(\bar{W} - \bar{\Theta} \Phi(t)). \quad (9)$$

### 3 有约束多变量广义预测控制

将(6)和(7)代入(8)得

$$J = \|GU + \Theta \Phi(t) - W\|_{\bar{R}}^2 + \|\bar{G}U + \bar{\Theta} \Phi(t) - \bar{W}\|_{\bar{Q}}^2 + \|U\|_I^2. \quad (10)$$

如果再加入对输入信号及输出信号的约束,以满足工程实际对控制的要求,将能极大地改善控制器性能,同时增加鲁棒性与抗干扰能力. 控制器在(10)的基础上加入如下约束条件:

$$U_{\min}^* \leq U^* \leq U_{\max}^*, \quad U_{\min} \leq U \leq U_{\max}, \quad (11)$$

$$Y_{\text{low}} \leq Y \leq Y_{\text{up}}, \quad \bar{Y}_{\min} \leq \bar{Y} \leq \bar{Y}_{\max}. \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} U_{\min}^* &= [u_{\min} \cdots u_{\min}]^T, \quad U_{\max}^* = [u_{\max} \cdots u_{\max}]^T, \\ U_{\min} &= [du_{\min} \cdots du_{\min}]^T, \quad U_{\max} = [du_{\max} \cdots du_{\max}]^T, \\ Y_{\text{low}} &= [y_{r1}(t) - y_{\text{low}} \cdots y_{rm}(t) - y_{\text{low}} \cdots y_{r1}(t) - y_{\text{low}} \cdots y_{rm}(t) - y_{\text{low}}]^T, \\ Y_{\text{up}} &= [y_{r1}(t) + y_{\text{up}} \cdots y_{rm}(t) + y_{\text{up}} \cdots y_{r1}(t) + y_{\text{up}} \cdots y_{rm}(t) + y_{\text{up}}]^T, \\ \bar{Y}_{\min} &= [dy_{\min} \cdots dy_{\min}]^T, \quad \bar{Y}_{\max} = [dy_{\max} \cdots dy_{\max}]^T. \end{aligned}$$

这里  $u_{\min}$  和  $u_{\max}$  为输入所应该满足的上下限,  $du_{\min}$  和  $du_{\max}$  为输入增量所应该满足的上下限,  $y_{\text{low}}$  和  $y_{\text{up}}$  为输出预测与设定之差所应该满足的上下限,  $dy_{\min}$  和  $dy_{\max}$  为输出预测增量所应该满足的上下限. 这些限值将根据系统而预先选定.

将(6)与(7)代入(12)得

$$Y_{\text{low}} \leq GU + \Theta \Phi(t) \leq Y_{\text{up}}, \quad \bar{Y}_{\min} \leq \bar{G}U + \bar{\Theta} \Phi(t) \leq \bar{Y}_{\max}. \quad (13)$$

于是由(10)、(11)和(12)所构成的有约束优化问题能被考虑成下面的含有线性不等式约束的二次优化问题:

$$\min \quad \Psi(x) = \frac{1}{2} x^T D x + I^T x, \quad (14)$$

$$\text{s. t.} \quad Kx \geq J, \quad x = U. \quad (15)$$

这里

$$D = (G^T \bar{R} G + \bar{G}^T \bar{Q} \bar{G} + I)^T (G^T \bar{R} G + \bar{G}^T \bar{Q} \bar{G} + I), \quad (16)$$

$$I = G^T \bar{R}(\Theta \Phi(t) - W) + \bar{G}^T \bar{Q}(\bar{\Theta} \Phi(t) - \bar{W}), \quad (17)$$

$$K = \begin{bmatrix} \Omega \\ -\Omega \\ I_{P \cdot Nu} \\ -I_{P \cdot Nu} \\ G \\ -G \\ \bar{G} \\ -\bar{G} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} U_{\min}^* - \Gamma \\ \Gamma - U_{\max}^* \\ U_{\min} \\ -U_{\max} \\ Y_{\text{low}} - \Theta\Phi(t) \\ \Theta\Phi(t) - Y_{\text{up}} \\ \bar{Y}_{\min} - \bar{\Theta}\Phi(t) \\ \bar{\Theta}\Phi(t) - \bar{Y}_{\max} \end{bmatrix},$$

其中  $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{P \cdot Nu \times P \cdot Nu}^{-1}, \quad \Gamma = \Omega \begin{bmatrix} u(t-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$

### 4 求解有约束预测控制的神经优化方法

我们的目的是在可行域  $\bar{S} = \{x: Kx \geq J\}$  上找出使  $\Psi(x)$  取最小值的  $x^*$ .

(14) 和 (15) 式所描述的优化问题可用图 1 所示的神经网络实现.

图 1 中各符号意义如下:

1)  $f$  为不等式约束平面约束放大器函数, 且

$$f(z) = \alpha_0 z h(-z).$$

其中  $h$  为一阶跃函数. 所以  $f$  为一个半线性函数且  $zf(z) \geq 0$ ;

2)  $g$  为信号放大器函数, 即  $V_i = g(v_i), \beta$  为放大倍数;

3)  $V \in \mathbb{R}^n$  为信号平面输出电压矢量; 对应于 (16) 式中的  $x$ , 这里  $n$  等于  $x$  的维数;

4)  $I \in \mathbb{R}^n$  为信号平面输入电流矢量;

5)  $J \in \mathbb{R}^r$  为约束平面输入电流矢量;  $r$  为约束方程组的维数;

6)  $D$  为自跨导矩阵;

7)  $K$  为异跨导矩阵; 4) ~ 7) 中的量的意义同 (14) 和 (15) 式;

8)  $\varphi \in \mathbb{R}^r$  为约束平面的输出电压矢量;

由 KCL 可得图 1 所示优化网络的动态方程:

$$C_i \frac{dv_i}{dt} = -I_i - \frac{v_i}{R_i} - \sum_{j=1}^n d_{ij} V_j - \sum_{j=1}^r k_{ji} \varphi_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

其中

$$\varphi_j = f(-J_j + \sum_{l=1}^n k_{jl} V_l), \quad j = 1, \dots, r. \quad (2)$$

该网络的能量函数可定义为

$$E = I^T V + \frac{1}{2} V^T D V + \sum_{j=1}^r \mathcal{F}(K_j V_j - J_j) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \int_0^{V_i} g^{-1}(\tau) d\tau. \quad (3)$$

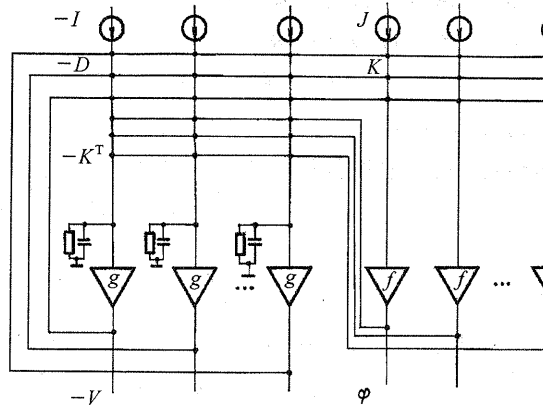


图 1 优化神经网络

其中  $K_j$  为  $K$  的第  $j$  行.  $\mathcal{F}$  为  $f$  的不定积分, 即

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\alpha_0}{2} z^2 h(-z).$$

从而可见, (20) 式中第一、二项代表二次优化的代价函数; 第三项则表示违反约束条件的测度; 第四项为调节项, 我们的目的就是寻找使 (20) 式的第三项为 0, 第一、第二项取最小值的  $V^*$  (第四项可以忽略不计). 这样

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dV_i}{dt} \left( I_i + \frac{v_i}{R_i} + \sum_{j=1}^n d_{ij} V_j + \sum_{j=1}^r k_{ij} \varphi_j \right) = \sum_{i=1}^n -\frac{C_i}{\beta} \left( \frac{dV_i}{dt} \right)^2. \quad (21)$$

由于  $C_i, \beta > 0$ , 所以  $dE/dt \leq 0$ , 且当且仅当  $\frac{dV}{dt} = 0$  时,  $\frac{dE}{dt} = 0$ .

因此  $E(V)$  是 (18) 式所描述的 T-H 神经网络的 Lyapunov 函数. (21) 式表明: 系统的能量函数随时间的增大而不断减少, 直到系统的稳定态, 它对应于  $E(V)$  的局部最小值. 这里  $E(V)$  与优化问题 (14) (15) 具有相似的形式. 如果二次优化问题 (14) (15) 有唯一解, 则当  $\alpha$  较大时, 电路的稳态解就非常靠近二次优化问题的解. 因此我们可以用硬件方法或龙格-库塔方法进行优化问题的求解, 该网络将以时间常数  $\tau$  达到稳态, 其中

$$\tau \propto C/\alpha_0 \beta \mu_{\min}.$$

这里  $\mu_{\min}$  是  $K^T K + \frac{1}{\alpha} D$  的最小特征值.

## 5 仿真研究

为了验证本文的优化方法, 我们进行了仿真, 设系统模型为

$$[I + A_1 q^{-1} + A_2 q^{-2}] y(t) = [B_0 + B_1 q^{-1}] u(t-1) + [I + C_1 q^{-1}] \xi(t)/\Delta. \quad (22)$$

这里

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.4 & -0.2 \\ -0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}.$$

$\xi(t)$  是白噪声向量序列, 方差阵为  $\text{diag}[0.1 \quad 0.1]$ .

根据上面模型, 设计了有约束广义预测控制器, 并借助于本文的 T-H 网络进行控制器的在线求解. 用四阶龙格-库塔方法进行求解, 可得网络的平衡状态输出电压  $V^*(t)$ , 即得系统在  $t$  时刻的控制信号  $u(t)$ .

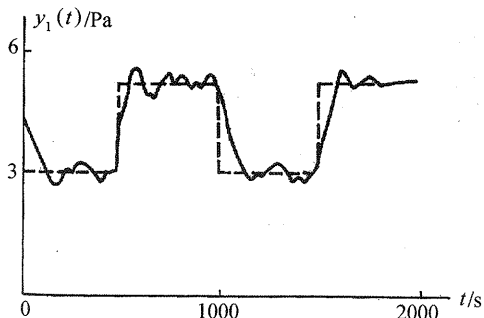


图 2 仿真输出曲线  $y_1(t)$

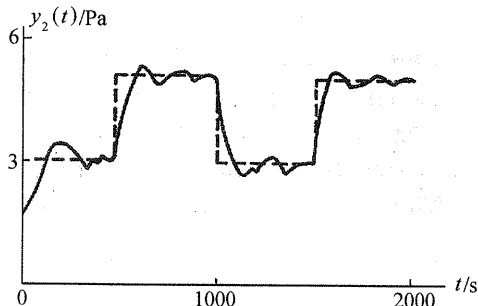


图 3 仿真输出曲线  $y_2(t)$

控制器参数取为

$$N = 6, \quad Nu = 2, \quad \alpha = 0.6, \quad R = \text{diag}(2, 1), \quad Q = \text{diag}(1.5, 1.8),$$

$$y_{\text{low}} = 1, \quad y_{\text{up}} = 1, \quad dy_{\text{min}} = -0.5, \quad dy_{\text{max}} = 0.5,$$

$$u_{\text{min}} = 1, \quad u_{\text{max}} = 5, \quad du_{\text{min}} = -0.6, \quad du_{\text{max}} = 0.6,$$

图 2 和图 3 为系统的输出曲线,从图中可以看出,用 T-H 神经网络求解的有约束 GF 跟踪精度高并且超调小,因而是一种很有效的多变量控制方法。

通过许多的仿真例子也证实, T-H 优化网络方法与通常的非线性规划方法相比,具有速且能够求得精确最优解的特点,并且数据稳定性也好。因而说明,神经网络在复杂系统的时优化与控制等方面具有广阔的应用前景。

### 参 考 文 献

- 1 Clarke, D. W. et al. . Generalized predictive controller. Automatica, 1987, 23(2): 137-160
- 2 Tank, D. W. and Hopfield, J. J. . Simple neural optimization network; an A/D convert signal decision circuit, and a linear programming circuit. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1986, 33(5): 533-541
- 3 Kennedy, M. P. and Chua, L. O. . Neural networks for nonlinear programming. IEEE Trans. Circuits & Systems, 1988, (5): 554-563
- 4 Murre, J. . Neural network for quadratic optimization with bound constraints. Neural Networks, 1993, 4(3): 293-304

## The Constrained Multivariable Predictive Controller Based on Tank-Hopfield Neural Network

CHEN Zengqiang, ZHAO Tianhang and YUAN Zhuzhi

(Department of Computer and System Sciences, Nankai University · Tianjin, 300071, PRC)

**Abstract:** Through the constrain of the signals of system, this paper drives the constrained multivariable generalized predictive control, and solves the complicate optimizing problem with T-H neural network. It transformed into the solving of a stable state of a T-H optimizing neural networks for the constrained generalized predictive controller. Hence, the solution can be obtained through hardware electricity circuit or Runge-Kutta numerical algorithm. The simulation research on a process verifies that the method is very effective.

**Key words:** neural network; T-H network; predictive control; multivariable control; quadratic optimization

### 本文作者简介

**陈增强** 1964 年生。1987 年、1990 年和 1997 年于南开大学获得理学学士、工学硕士和工学博士学位,现为南开大学计算机与系统科学系副教授。主要研究方向为自适应控制,预测控制,神经网络控制。

**赵天航** 1974 年生。1996 年毕业于南开大学数学系,现正在该校计算机与系统科学系攻读硕士学位,主要感兴趣的领域为预测控制,神经网络控制。

**袁著祉** 1937 年生。教授,博士生导师。主要研究方向为自适应控制理论及应用,智能控制与管理。