

任意初态下不确定时滞系统的 PD 型迭代学习控制*

孙明轩 黄宝健 张学智

(西安工业学院电子工程系·西安, 710032)

摘要: 针对不确定时滞系统讨论带有初始修正的 PD 型迭代学习控制算法, 给出这类系统的输出极限轨迹, 以及迭代输出收敛于该极限轨迹的较弱的充分条件, 其中将初始条件放宽为某任意可达初始状态函数的可重复性. 仿真结果表明这种算法中的初始修正项可以有效地抑制初始偏移的影响.

关键词: 初始条件问题; 鲁棒收敛性; 迭代学习控制; 时滞系统

1 引言

在迭代学习控制技术中, 迭代需从某初始点开始进行. 所谓初始条件是指在每次迭代时, 为保证控制系统的收敛性, 对系统迭代初始点的重复定位操作所限定的条件. 常见的初始条件有以下两种:

IC1: 迭代初态与期望初态一致(这时, 称初态是严格重复的),

IC2: 迭代初态固定(这时, 称初态是重复的).

大多已发表的文献在 IC1 下讨论算法收敛性^[1,2]. 在 IC2 下初态是可以任意设置的, IC2 的实现比 IC1 容易. 因此, 从应用角度考虑(对于过程控制只能要求 IC2, 将收敛性要求的初始条件由 IC1 放宽为 IC2 是具有实际意义的. 现有文献中关于在 IC2 下的算法收敛性问题的研究结果并不多^[3](本文称其为鲁棒收敛性).

近年 Lee 等^[4]已将这种控制技术应用于某间歇反应器的温度控制. 他们将这种技术应用于具有某种重复运行性质的工业过程是十分诱人的. 在许多化工过程中, 不同品种的批量生产方式越来越多, 但系统中时延现象极为普遍. 因此, 研究应用迭代学习控制技术实现时滞系统的跟踪控制问题是有背景的. 文[5]首次讨论了一类非线性时滞系统的迭代学习控制. 本文通过在 PD 型学习律上增加初始修正成份, 给出其极限轨迹. 进一步地, 在 IC2 下证明一类非线性时滞系统迭代学习控制的鲁棒收敛性, 并给出数值仿真算例.

文中 $\|\cdot\|$ 表示 l_∞ 范数, $\|\cdot\|_\lambda$ 表示 λ 范数, 并记 $\rho(\cdot)$ 为矩阵的谱半径.

2 主要结果

考虑具有重复运行性质的时滞系统

$$\dot{x}_k(t) = f(x_k(t), x_k(t - \theta), t) + Bu_k(t), \quad (1a)$$

$$y_k(t) = Cx_k(t), \quad t \in [0, T], \quad (1b)$$

$$x_k(t) = \varphi_k(t), \quad t \in [-\theta, 0]. \quad (1c)$$

式中下标 $k = 0, 1, 2, \dots$ 为重复次数; $x_k(t) \in \mathbb{R}^n, u_k(t), y_k(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态, 控制和输出向量; 时滞 $\theta \geq 0$, 初始状态函数 $\varphi_k(\cdot)$ 在 $[-\theta, 0]$ 上分段连续; 非线性函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 关于 t 分段连续.

* 国家自然科学基金资助项目(69404004).

本文于 1996 年 10 月 29 日收到. 1997 年 8 月 19 日收到修改稿.

对于系统(1)采用带有初始修正的PD型学习律

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Gamma[e_k(t) + Le_k(t)] + \Gamma e^{-L t} \theta_h(t) e_k(0).$$

式中 $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, $y_d(t)$, $t \in [0, T]$ 为给定的期望轨迹; $\Gamma, L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 为增益矩阵; $u_0(t)$ 为 $[0, T]$ 上的分段连续函数; $\theta_h: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \frac{2}{h}(1 - \frac{t}{h}), & t \in [0, h], \\ 0, & t \in (h, T]. \end{cases}$$

当置 $L = 0$ 时, 我们称其为带初始修正的D型学习律.

假设:

A1) 存在 $\varphi^*(t)$, $t \in [-\theta, 0]$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) = \varphi^*(t), \quad t \in [-\theta, 0].$$

A2) 轨迹 $y_d^*(t)$, $t \in [0, T]$ 和初始状态函数 $\varphi^*(t)$, $t \in [-\theta, 0]$ 是可达的. 这里

$$y_d^*(t) = \begin{cases} y_d(t) + e^{-L t} \int_h^t \theta_h(\tau) d\tau [y_d(0) - C\varphi^*(0)], & t \in [0, h], \\ y_d(t), & t \in (h, T]. \end{cases}$$

A3) 非线性函数 $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 满足 Lipschitz 条件

$$\|f(x_1(t), x_1(t - \theta), t) - f(x_2(t), x_2(t - \theta), t)\| \leq k_f (\|x_1(t) - x_2(t)\| + \|x_1(t - \theta) - x_2(t - \theta)\|), \quad t \in [0, T].$$

假设 A2) 意味着存在控制 $u_d^*(t)$ 使得

$$\dot{x}_d^*(t) = f(x_d^*(t), x_d^*(t - \theta), t) + Bu_d^*(t), \quad ($$

$$y_d^*(t) = Cx_d^*(t), \quad t \in [0, T]. \quad ($$

$$x_d^*(t) = \varphi^*(t), \quad t \in [-\theta, 0]. \quad ($$

为了给出系统(1)在学习律(2)作用下的鲁棒收敛性, 需要以下引理

引理 1 设 $x(\cdot)$ 是 $[0, T]$ 上的非负实值连续函数, $a, b, c \geq 0$, 若

$$x(t) \leq c + \int_0^t e^{(a-\lambda)(t-\tau)} b x(\tau) d\tau, \quad \lambda > a + b,$$

则

$$x(t) \leq \frac{\lambda - a - b e^{(a+b-\lambda)T}}{\lambda - a - b} c.$$

证明略.

引理 2 设实序列 $\{a_k\}$ 满足

$$pa_k + qa_{k-1} \leq d_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

其中 $\{d_k\}$ 为给定的实扰动序列. 若 $p > -q \geq 0$, 则

$$\text{i) } d_k < \bar{d} \text{ 蕴涵 } a_k \leq a_0 + \frac{\bar{d}}{p+q} \text{ 以及 } \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{\bar{d}}{p+q},$$

$$\text{ii) } \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = d_\infty \text{ 蕴涵 } \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \frac{d_\infty}{p+q}.$$

证明见附录.

定理 1 若由(1)和(2)描述的迭代学习控制系统满足假设 A1)~A3), 且选取 Γ 使得

$$\rho(I - \Gamma CB) < 1$$

成立, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) = y_d^*(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8)$$

证 由(2)知, 当 $t \in [0, h]$ 时

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}^* &= \Delta u_k^* - \Gamma[\dot{e}_k^* + Le_k^* + \dot{y}_d - \dot{y}_d^* + L(y_d - y_d^*)] \\ &\quad - \Gamma e^{-L_t} \theta_h [e_k^*(0) + y_d(0) - y_d^*(0)], \end{aligned}$$

式中 $\Delta u_k^* \triangleq u_d^* - u_k, e_k^* \triangleq y_d^* - y_k$. 又由(5)可得

$$\Delta u_{k+1}^* = \Delta u_k^* - \Gamma[\dot{e}_k^* + Le_k^*] - \Gamma e^{-L_t} \theta_h e_k^*(0). \quad (9)$$

当 $t \in (h, T]$ 时, 因为 $y_d^* = y_d, e_k^* = e_k$ 以及 $\theta_h = 0$, 所以(9) 仍然成立. 定义 $f_d^* \triangleq f(x_d^*(t), x_d^*(t - \theta), t), f_k \triangleq f(x_k(t), x_k(t - \theta), t)$, 及 $\Delta x_k^* \triangleq x_d^* - x_k$. 由(1)和(6)知

$$\begin{aligned} \Delta u_{k+1}^* &= [I - \Gamma CB] \Delta u_k^* - \Gamma C(f_d^* - f_k) \\ &\quad - \Gamma LC[\Delta x_k^*(0) + \int_0^t f_d^* - f_k + B \Delta u_k^* d\tau] - \Gamma e^{-L_t} \theta_h e_k^*(0). \end{aligned} \quad (10)$$

对于任给 $\varepsilon > 0$, 存在非奇异矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 使得^[6]

$$\|Q[I - \Gamma CB]Q^{-1}\| \leq \rho(I - \Gamma CB) + \varepsilon.$$

因此, (10) 两端同乘 Q 可得

$$\begin{aligned} \|Q \Delta u_{k+1}^*\| &\leq [\rho(I - \Gamma CB) + \varepsilon] \|Q \Delta u_k^*\| + c_1 c_2 \int_0^t \|Q \Delta u_k^*\| d\tau \\ &\quad + c_1 k_f [\|\Delta x_k^*\| + \|\Delta x_k^*(t - \theta)\| + \int_0^t \|\Delta x_k^*\| \\ &\quad + \|\Delta x_k^*(\tau - \theta)\| d\tau] + (c_1 + c_3) \|\Delta x_k^*(0)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $c_1 = \max\{\|Q\Gamma C\|, \|Q\Gamma LC\|\}, c_2 = \|BQ^{-1}\|, c_3 = \frac{2}{h} \|\Gamma\| \|C\| \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-L_t}\|$.

给出以下估计

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\Delta x_k^*(\tau - \theta)\| d\tau &= \int_{-\theta}^{t-\theta} \|\Delta x_k^*\| d\tau \\ &\leq \begin{cases} \int_{-\theta}^{t-\theta} \|\Delta \varphi_k^*\| d\tau, & t \leq \theta, \\ \int_{-\theta}^0 \|\Delta \varphi_k^*\| d\tau + \int_0^{t-\theta} \|\Delta x_k^*(\tau)\| d\tau, & t > \theta \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} \int_{-\theta}^0 \|\Delta \varphi_k^*\| d\tau, & t \leq \theta, \\ \int_{-\theta}^0 \|\Delta \varphi_k^*\| d\tau + \int_0^t \|\Delta x_k^*\| d\tau, & t > \theta \end{cases} \\ &\leq \int_{-\theta}^0 \|\Delta \varphi_k^*\| d\tau + \int_0^t \|\Delta x_k^*\| d\tau \\ &\leq \theta x_k^0 + \int_0^t \|\Delta x_k^*\| d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $\Delta \varphi_k^* \triangleq \varphi^* - \varphi_k, x_k^0 = \sup_{t \in [-\theta, 0]} \|\Delta \varphi_k^*\|$. 利用状态方程(1a) 和(12) 可给出关于滞后状态的估计. 当 $t > \theta$ 时

$$\|\Delta x_k^*(t - \theta)\| \leq 2k_f \int_0^t \|\Delta x_k^*\| d\tau + c_2 \int_0^t \|Q \Delta u_k^*\| d\tau + (1 + k_f \theta) x_k^0. \quad (13)$$

对于 $t \leq \theta, \|\Delta x_k^*(t - \theta)\| = \|\Delta \varphi_k^*(t - \theta)\| \leq x_k^0$, 故(13) 对于 $t \leq \theta$ 成立. 另外, 因为(13) 的左端换成 $\|\Delta x_k^*(t)\|$ 亦成立, 所以

$$z_k \leq 2k_f \int_0^t e^{\lambda(\tau-t)} z_k d\tau + c_2 \lambda_0 \|Q\Delta u_k^*\|_\lambda + (1 + k_f \theta) x_k^0,$$

式中 $z_k = e^{-\lambda} \|\Delta x_k^*\|$, $\lambda_0 = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda}$. 进一步地, 利用引理 1, 当 $\lambda > 2k_f$ 时,

$$\|\Delta x_k^*\|_\lambda \leq c_4 [c_2 \lambda_0 \|Q\Delta u_k^*\|_\lambda + (1 + k_f \theta) x_k^0],$$

式中

$$c_4 = \frac{\lambda - 2k_f e^{(2k_f - \lambda)T}}{\lambda - 2k_f}.$$

将(12)和(13)代入(11), 可得

$$\begin{aligned} \|Q\Delta u_{k+1}^*\| &\leq [\rho(I - \Gamma CB) + \varepsilon] \|Q\Delta u_k^*\| + c_1 c_2 (1 + k_f) \int_0^t \|Q\Delta u_k^*\| d\tau \\ &\quad + c_1 k_f \|\Delta x_k^*\| + 2c_1 k_f (1 + k_f) \int_0^t \|\Delta x_k^*\| d\tau \\ &\quad + [c_1(1 + k_f)(1 + k_f \theta) + c_3] x_k^0. \end{aligned}$$

上式两端同乘 $e^{-\lambda} (\lambda > 0)$, 并计算两端的 λ 范数

$$\begin{aligned} \|Q\Delta u_{k+1}^*\|_\lambda &\leq [\rho(I - \Gamma CB) + \varepsilon + c_1 c_2 \lambda_0 (1 + k_f)] \|Q\Delta u_k^*\|_\lambda \\ &\quad + [c_1 k_f + 2c_1 k_f \lambda_0 (1 + k_f)] \|\Delta x_k^*\|_\lambda \\ &\quad + [c_1(1 + k_f)(1 + k_f \theta) + c_3] x_k^0. \end{aligned}$$

进一步地, 将(14)代入(15)

$$\|Q\Delta u_{k+1}^*\|_\lambda \leq \bar{\rho} \|Q\Delta u_k^*\|_\lambda + \xi_k.$$

式中 $\bar{\rho} = \rho(I - \Gamma CB) + \varepsilon + c_1 c_2 \lambda_0 (1 + k_f) + c_2 c_4 c_5 \lambda_0$, $\xi_k = [c_1(1 + k_f)(1 + k_f \theta) + c_3 + c_1 k_f \theta] x_k^0$, $c_5 = c_1 k_f [1 + 2\lambda_0(1 + k_f)]$. 当选择足够大的 $\lambda > 2k_f$ 时, 条件(7)蕴涵 $\bar{\rho} < 1$. 且利用引理 2, 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 ξ_k 的定义知, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q\Delta u_k^*\|_\lambda = 0$. 又由 λ 范数的定义 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q\Delta u_k^*(t)\| = 0, t \in [0, T]$. 进一步地, 利用 Q 的非奇异性, 由(14)和(1b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta x_k^*(t)\| = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k^*(t)\| = 0, t \in [0, T]$. 定理得证.

关于定理 1, 作以下说明:

① 从定理 1 的证明过程可看出, 条件(7)可以换为已发表文献中常见的范数条件 $\| \Gamma CB \| < 1$. 但由于条件(7)弱于 $\| I - \Gamma CB \| < 1$, 故定理具有更广泛的适用范围.

② 定理 1 中需要的假设 A1) 为渐近条件. 其中, 除可达性限制外, $\varphi^*(t)$ 是可以任意的.

③ 容易证明, 系统(1)使用文[3]提出的 PD 型学习律时, 输出极限轨迹为

$$y_d^*(t) = y_d(t) + e^{-\mu} [C\varphi^*(0) - y_d(0)].$$

选取 L 为稳定矩阵且具有较强的衰减模态, 可以改变(17)中 $y_d^*(t)$ 的性状, 从而达到改善性能的目的. 对于(5)中给出的输出极限轨迹 $y_d^*(t)$, 除可选取 L 改变其性状外, 还可以通过调整 $\theta_k(t)$ 中的 h 改变其性状. 详细地说:

若 $C\varphi^*(0) \neq y_d(0)$, 则在 $[0, h)$ 上 $y_k(t)$ 不能收敛于 $y_d(t)$. 但由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(h) = y_d(h)$ 及 $y_d(t)$ 的连续性知, 对任给的正数 ε^* , 总可选择适当小的 $h > 0$ 和充分大的 k , 使 $\|y_k(h) - y_d(h)\| < \varepsilon^*$, 即可使 $y_k(h)$ 逼近 $y_d(h)$. 若 $C\varphi^*(0) = y_d(0)$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(0) = 0$, 利用定理的: 可推得在 $[0, T]$ 上 $y_k(t)$ 一致收敛于 $y_d(t)$.

3 仿真结果

对于具有重复运行性质的时滞系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -x^1(t) - x^2(t - \theta) \\ \cos(x^1(t - \theta)x^3(t)) \\ -x^2(t) - x^3(t - \theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (18a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t). \quad (18b)$$

其中 $t \in [0, 1]$, $\theta = 0.5$, 给定期望轨迹为

$$y_d(t) = \begin{bmatrix} 12t^2(1-t) \\ \cos(\pi t) \end{bmatrix}. \quad (19)$$

设选取迭代初始状态函数 $\varphi_h^1(t) = 0.6(1 + e^{-t})$, $\varphi_h^2(t) = 1.0(1 + e^{-t})$, $\varphi_h^3(t) = 0.2(1 + e^{-t})$, $t \in [-0.5, 0]$; 选取初始输入 $u_0(t) = 0, t \in [0, 1]$. 仿真研究分别采用 PD 型学习律、带初始修正的 D 型学习律、带初始修正的 PD 型学习律. 选取学习增益矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 7.0 & 0 \\ 0 & 7.0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

初始修正函数 $\theta_h(t)$ 中的 $h = 0.2$. 分别迭代 15 次获得极限轨迹. 仿真结果见图 1, 2 所示. 图中, 曲线 1 为期望轨迹, 曲线 2 为单纯采用 PD 型学习律时的极限轨迹, 曲线 3 为采用带初始修正的 D 型学习律的极限轨迹, 曲线 4 为采用学习律 (2) 的极限轨迹. 曲线 3 和曲线 4 的跟踪性能优越于曲线 2. 并且, 曲线 4 的跟踪性能还可以通过增强 P 型控制作用进一步得到改善.

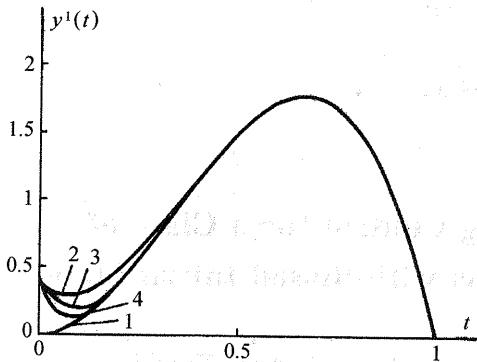


图 1 输出轨迹 $y^1(t)$

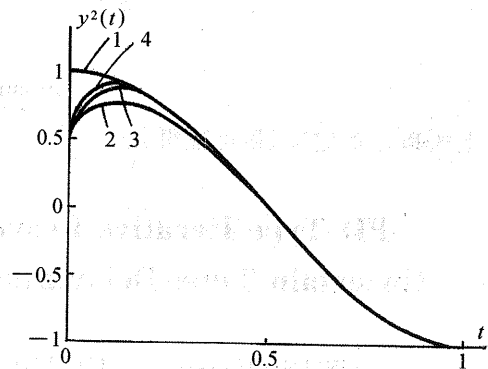


图 2 输出轨迹 $y^2(t)$

4 结 论

文中讨论了一类含状态时滞被控对象的迭代学习控制算法, 其初始条件是关于状态的初始函数提出的, 而不仅是关于 $t = 0$ 时的状态. 除可达性限制外, 这里的初始函数是可以任意设置的. 在被选择的初始函数渐近重复下, 学习算法便可保证系统迭代输出一致收敛于文中给出的极限轨迹. 它放宽了现有文献中对每一次迭代所要求的一致性初始条件. 理论和仿真结果表明, 文中提出的带有初始修正的 PD 型学习律比单纯的 PD 型学习律能达到更高的跟踪精度.

参 考 文 献

- 1 Arimoto, S., Kawamura, S. and Miyazaki, F.. Bettering operation of robots by learning. J. Robotic Systems, 1984, 1(2): 123-140
- 2 Porter, B. and Mohamed, S. S.. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action. Int. J. Systems Science, 1991, 22(3): 447-454

- 3 Lee, H. S. and Bien, Z. . Study on robustness of iterative learning control with non-zero initial error. Int. J. Control 64(3):345-359
- 4 Lee, K. S. , Bang, S. H. and Chang, K. S. . Feedback-assisted iterative learning control based on an inverse process J. Process Control, 1994, 4(2):77-89
- 5 孙明轩, 陈阳泉, 黄宝健. 非线性时滞系统的高阶迭代学习控制. 自动化学报, 1994, 20(3):360-365
- 6 Ortega, J. M. and Rheinboldt, W. C. . Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. New York: A Press, 1970

附 录

证 i) 略. ii) 作变换

$$s_k = a_k - \frac{d_\infty}{p+q}, \quad t_k = \frac{d_k - d_\infty}{p}.$$

记 $\rho = -q/p$, 有

$$s_k \leq \sum_{j=1}^k \rho^{k-j} t_j + \rho^k s_0 \leq \frac{\sum_{j=1}^k \rho^{-j} |t_j| + |s_0|}{\rho^{-k}}.$$

由于 $0 \leq \rho < 1$, 利用 Stolz 定理

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^k \rho^{-j} |t_j| + |s_0|}{\rho^{-k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\rho^{-(k+1)} |t_{k+1}|}{\rho^{-(k+1)} - \rho^{-k}} = 0.$$

因此

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_k \leq 0.$$

结合上式和 s_k 的定义, 便可证得 ii).

PD-Type Iterative Learning Control for a Class of Uncertain Time-Delay Systems with Biased Initial State

SUN Mingxuan, HUANG Baojian and ZHANG Xuezhi

(Department of Electrical Engineering, Xi'an Institute of Technology · Xi'an, 710032, PRC)

Abstract: In this paper, by introducing an initial-update-action term into the PD-type learning law, a learning control algorithm is proposed for perfect tracking of a class of uncertain time-delay systems with biased initial state. A milder condition for the convergence of the learning control is proved. It is also illustrated, by simulation, that the proposed algorithm yields a good performance even in the presence of initial state.

Key words: initial condition problem; robust convergence; iterative learning control; time-delay

本文作者简介

孙明轩 见本刊 1998 年第 3 期第 326 页.

黄宝健 1961 年生. 1987 年于北京工业学院应用数学系获理学硕士学位. 现为西安工业学院基础部副教授. 数学教学与研究, 目前研究方向为迭代学习控制理论与应用.

张学智 1946 年生. 1982 年于北京工业学院自动控制系获工学硕士学位. 现为西安工业学院电子工程系副教授. 研究方向为工业自动化, 计算机控制.