

## 时滞控制系统的无时滞变结构控制器\*

谢胜利 谢振东 刘永清

(华南理工大学自动控制工程系·广州, 510641)

摘要: 对时滞控制系统的变结构控制器的设计, 不是象通常的方法那样在一个泛函空间中进行, 而只是在一个函数空间中, 即控制器和切换流形均不带有时滞项, 此方法削弱了要求控制器有记忆功能的限制. 我们还通过例子实现了设计步骤.

关键词: 时滞; 控制系统; 变结构; 无滞后控制器

### 1 引言

随着变结构控制理论的发展, 关于时滞控制系统的变结构控制研究也有了一些结果(如[1~4]). 在目前的这些结果中, 变结构控制器都是带有相应时滞项的. 对时滞控制系统其变结构控制器中的时滞项(即控制器的记忆功能)是否是必要的, 即对时滞系统是否存在无滞后的变结构控制, 我们在[5]中进行了初步讨论. 但对时滞项  $A_2$  的要求太强了点(要求是非奇的). 本文利用等价控制方法, 削弱了对  $A_2$  的非奇要求, 所给出的变结构控制器及切换面都是无时滞的, 且通过例子实现了设计步骤.

### 2 结论及证明

考虑如下时滞控制系统

$$\dot{X}(t) = A_1 X(t) + A_2 X(t - \tau) + Bu(t) \quad (2.1)$$

及相应的无滞后系统

$$\dot{X}(t) = (A_1 + A_2)X(t) + Bu(t). \quad (2.2)$$

其中  $X \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, A_1, A_2$  及  $B$  是相应阶的常数矩阵, 时滞  $\tau > 0$ .

设  $B$  是列满秩的, 且  $\det(B_2) \neq 0$ , 其中  $B = [B_1, B_2]^T$ , 将(2.1)写成

$$\dot{X}(t) = (A_1 + A_2)X(t) - \tau A_2 \dot{X}(t - \zeta\tau) + Bu(t). \quad (2.1)'$$

其中  $\dot{X}(t - \zeta\tau) = [\dot{x}_1(t - \zeta_1\tau), \dots, \dot{x}_n(t - \zeta_n\tau)]^T, 0 < \zeta_i < 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

对(2.1)'和(2.2)作非奇异线性变换  $y = Tx$ , 其中

$$T = \begin{bmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_m \end{bmatrix},$$

则相应的有

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_1 y(t) - \tau \tilde{A}_2 y(t - \zeta\tau) + \tilde{B}u, \quad (2.3)$$

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_1 y(t) + \tilde{B}u. \quad (2.4)$$

其中

$$\tilde{A}_1 = T(A_1 + A_2)T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

\* 国家自然科学基金(69874013)、广东省自然科学基金(980506)资助项目。  
本文于 1995 年 6 月 6 日收到, 1997 年 12 月 1 日收到修改稿。

$$\tilde{A}_2 = TA_2T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

从而(2.3)、(2.4)分别为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 - \tau\hat{A}_{11}\dot{y}_1(t - \zeta\tau) - \tau\hat{A}_{12}\dot{y}_2(t - \zeta\tau), \\ \dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 - \tau\hat{A}_{21}\dot{y}_1(t - \zeta\tau) - \tau\hat{A}_{22}\dot{y}_2(t - \zeta\tau) + B_2u, \\ \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + B_2u. \end{cases}$$

由[6]可知,  $(A_1 + A_2, B)$  可控制蕴含  $(A_{11}, A_{12})$  可控制. 再记  $TA_1T^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \\ A_{21}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$ , 且  $A_{11} - \hat{A}_{11}, A_{12}^* = A_{12} - \hat{A}_{12}, A_{21}^* = A_{21} - \hat{A}_{21}, A_{22}^* = A_{22} - \hat{A}_{22}$ , 现设切换函数为

$$S(t) = C_1y_1 + C_2y_2.$$

其中  $C_1 \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}, C_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为待定矩阵, 则有切换面

$$S_0 = \{(y_1, y_2)^T; C_1y_1 + C_2y_2 = 0\}.$$

取  $C_2$  可逆, 则在  $S_0$  上有  $y_2 = -C_2^{-1}C_1y_1$ , 将此代入(2.5)的第一式, 得到滑动模运动方

$$\dot{y}_1(t) = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)y_1(t) - \tau(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}C_2^{-1}C_1)\dot{y}_1(t - \zeta\tau).$$

现在我们讨论它的运动性能.

由于  $(A_{11}, A_{12})$  可控, 则存在矩阵  $K$  可使矩阵  $A_{11} - A_{12}K$  任意极点. 取  $C_2^{-1}C_1 = \min\{\operatorname{Re}\lambda(D)\} = -\alpha$ .

其中  $D = A_{11} - A_{12}K = A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1$ ,  $\operatorname{Re}\lambda(D)$  表示  $D$  的特征值的实部. 从而可取  $\alpha < 0$ .

现设

$$H_1) \quad \tau < \frac{1}{\|Q\| + \|DQ\| \alpha^{-1}}.$$

其中  $Q = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}K$ . 再记

$$f(\epsilon) = \frac{e^{-\epsilon\tau}}{\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}} - \tau.$$

则有

$$f(0) = \frac{1}{\|Q\| + \|DQ\| \alpha^{-1}} - \tau > 0.$$

由于  $f(\epsilon)$  关于充分小的  $\epsilon$  是连续的, 则存在充分小的  $\epsilon \in (0, \alpha)$ , 使得  $f(\epsilon) > 0$ , 即

$$\tau < \frac{e^{-\epsilon\tau}}{\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}}.$$

由(2.9)式有

$$(y_1(t) + \tau Qy_1(t - \zeta\tau))' = D(y_1(t) + \tau Qy_1(t - \zeta\tau)) - \tau DQy_1(t - \zeta\tau),$$

即

$$\dot{Z}(t) = DZ(t) - \tau DQy_1(t - \zeta\tau).$$

其中  $Z(t) = y_1(t) + \tau Qy_1(t - \zeta\tau)$ , 由(2.10)式有

$$Z(t) = e^{Dt}Z(0) - \tau \int_0^t e^{D(t-s)} DQy_1(s - \zeta\tau) ds.$$

记  $\Phi = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \|y_1(s)\|$ ,  $1 + \tau \|Q\| = l$ , 对上面所述  $\epsilon$ , 由(2.11)可得

$$\|Z(t)\| e^{\alpha t} \leq l\Phi e^{-(\alpha-\epsilon)t} + \tau \int_0^t e^{-(\alpha-\epsilon)(t-s)} \|DQ\| e^{\epsilon\tau} \|y_1(s - \zeta\tau)\| e^{\epsilon(s-\zeta\tau)} ds$$

$$\leq l\Phi + \tau e^{\epsilon\tau} \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1} \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \}. \quad (2.12)$$

上面第二个不等式用到了:  $0 < \zeta < 1$ , 从而

$$\begin{aligned} \|y_1(t)\| e^{\epsilon t} &\leq \|Z(t)\| e^{\epsilon t} + \tau \|Q\| e^{\epsilon\zeta\tau} \|y_1(t - \zeta\tau)\| e^{\epsilon(t - \zeta\tau)} \\ &\leq \|Z(t)\| e^{\epsilon t} + \tau \|Q\| e^{\epsilon\tau} \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} \\ &\leq l\Phi + \tau e^{\epsilon\tau} (\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}) \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

注意(2.13)的右端是不减的, 则

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} \leq l\Phi + \tau e^{\epsilon\tau} [\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}] \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \}. \quad (2.14)$$

故

$$\begin{aligned} \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} &\leq \sup_{-\tau \leq s \leq 0} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} + \sup_{0 \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} \\ &\leq (1 + l)\Phi + \tau e^{\epsilon\tau} [\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}] \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

由(2.10)式知,  $\lambda = \tau e^{\epsilon\tau} [\|Q\| + \|DQ\| (\alpha - \epsilon)^{-1}] < 1$ , 故(2.15)可化为

$$\sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} \leq \frac{1+l}{1-\lambda} \Phi,$$

故有

$$\|y_1(t)\| = \|y_1(s)\| e^{\epsilon t - \epsilon s} \leq e^{-\alpha} \sup_{-\tau \leq s \leq t} \{ \|y_1(s)\| e^{\epsilon s} \} \leq \frac{1+l}{1-\lambda} \Phi e^{-\alpha}, \quad (2.16)$$

即系统(2.9)是渐近稳定的.

从而我们可以得到:

**定理 1** 若  $(A_1 + A_2, B)$  可控, 且  $H_1)$  成立, 则在由(2.8)决定的切换流形  $S = 0$  上的滑动模运动方程(2.9)是渐近稳定的.

其次, 我们要考虑, 由(2.8)所确定的切换流形  $S_0$  是否构成滑动模态区, 即是否满足可达条件

$$S^T(t)\dot{S}(t) < 0, \quad \text{对} \quad S^T(t) \neq 0. \quad (2.17)$$

注意(2.5)可以写成

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 - \hat{A}_{11}y_1 + \hat{A}_{11}y_1(t - \tau) - \hat{A}_{12}y_2 + \hat{A}_{12}y_2(t - \tau), \\ \dot{y}_2 = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 - \hat{A}_{21}y_1 + \hat{A}_{21}y_1(t - \tau) - \hat{A}_{22}y_2 + \hat{A}_{22}(t - \tau) + B_2u, \end{cases} \quad (2.18)$$

或者

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = A_{11}^*y_1 + A_{12}^*y_2 + \hat{A}_{11}y_1(t - \tau) + \hat{A}_{12}y_2(t - \tau), \\ \dot{y}_2 = A_{21}^*y_1 + A_{22}^*y_2 + \hat{A}_{21}y_1(t - \tau) + \hat{A}_{22}(t - \tau) + B_2u. \end{cases} \quad (2.19)$$

从而

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= C_1\dot{y}_1 + C_2\dot{y}_2 \\ &= C_1A_{11}^*y_1 + C_2A_{21}^*y_1 + C_1A_{12}^*y_2 + C_2A_{22}^*y_2 + (C_1\hat{A}_{11} + C_2\hat{A}_{21})y_1(t - \tau) \\ &\quad + (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})y_2(t - \tau) + C_2B_2u. \end{aligned} \quad (2.20)$$

取变结构控制为

$$\begin{aligned} u &= -(C_2B_2)^{-1} \{ (C_1A_{11}^* + C_2A_{21}^*)y_1 + (C_1A_{12}^* + C_2A_{22}^*)y_2 \\ &\quad + kS(t) + \rho \frac{S(t)}{\|S(t)\|^\sigma} \}, \quad 0 < \sigma < 1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

则(2.20)化为

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) = & -kS(t) - \rho \frac{S(t)}{\|S(t)\|^\sigma} + (C_1\hat{A}_{11} + C_2\hat{A}_{21})y_1(t - \tau) \\ & + (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})y_2(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.21)$$

而

$$\begin{aligned} & (C_1\hat{A}_{11} + C_2\hat{A}_{21})y_1(t - \tau) + (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})y_2(t - \tau) \\ & = (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})C_2^{-1}(C_1y_1(t - \tau) + C_2y_2(t - \tau)) \\ & \quad - (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})C_2^{-1}C_1y_1(t - \tau) + (C_1\hat{A}_{11} + C_2\hat{A}_{21})y_1(t - \tau). \end{aligned}$$

若

$$C_1\hat{A}_{11} + C_2\hat{A}_{21} = (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})C_2^{-1}C_1,$$

或者

$$H_2) \quad K\hat{A}_{11} + \hat{A}_{21} = (K\hat{A}_{12} + \hat{A}_{22})K, \quad (2.22)$$

则(2.22)化为

$$\dot{S}(t) = -kS(t) + (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})C_2^{-1}S(t - \tau) - \rho \frac{S(t)}{\|S(t)\|^\sigma}. \quad (2.23)$$

为了得到(2.17),我们先对(2.24)进行估计.记  $G = (C_1\hat{A}_{12} + C_2\hat{A}_{22})C_2^{-1}$ , 则

$$S(t)e^{kt} = S(0) + G \int_0^t e^{kv} S(v - \tau) dv - \rho \int_0^t e^{kv} \frac{S(v)}{\|S(v)\|^\sigma} dv. \quad (2.24)$$

从而

$$\begin{aligned} \|S(t)\| e^{kt} & \leq \|S(0)\| + \|G\| \int_0^t e^{kv} \|S(v - \tau)\| dv + \rho \int_0^t e^{kv} \|S(v)\|^{1-\sigma} dv \\ & \leq \|S(0)\| + \|G\| \int_0^t e^{kv} \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| dv + \rho \int_0^t e^{kv} \left[ \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \right]^{1-\sigma} dv \\ & = \|S(0)\| + \|G\| \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \cdot \frac{1}{k} (e^{kt} - 1) \\ & \quad + \rho \left[ \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \right]^{1-\sigma} \cdot \frac{1}{k} (e^{kt} - 1). \end{aligned} \quad (2.25)$$

则

$$\|S(t)\| \leq \|S(0)\| + \frac{1}{k} \|G\| \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| + \frac{1}{k} \rho \left[ \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \right]^{1-\sigma}. \quad (2.26)$$

同前理

$$\begin{aligned} \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(t)\| & \leq \sup_{-\tau \leq v \leq 0} \|S(v)\| + \sup_{0 \leq v \leq t} \|S(v)\| \\ & \leq 2 \sup_{-\tau \leq v \leq 0} \|S(v)\| + \frac{1}{k} \|G\| \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \\ & \quad + \frac{1}{k} \rho \left[ \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\| \right]^{1-\sigma}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

记  $h(t) = \sup_{-\tau \leq v \leq t} \|S(v)\|$ , 则

$$h(t) \leq 2h(0) + \frac{1}{k} \|G\| h(t) + \frac{1}{k} \rho h^{1-\sigma}(t). \quad (2.28)$$

若有

$$H_3) \quad \frac{1}{k} \|G\| < 1,$$

则有

$$h(t) \leq \frac{2h(0)}{1 - \|G\|/k} + \frac{\rho}{(1 - \|G\|/k)k} h^{1-\sigma}(t). \quad (2.30)$$

再记

$$F(h) = h - \frac{2kh(0)}{k - \|G\|} - \frac{\rho}{k - \|G\|} h^{1-\sigma}.$$

由  $0 < \sigma < 1$ , 则

$$F(0) = -\frac{2kh(0)}{k - \|G\|} < 0.$$

另外

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{F(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \frac{2kh(0)}{(k - \|G\|)h} - \frac{\rho}{(k - \|G\|)h^\sigma} \right] = 1,$$

则当  $h \rightarrow +\infty$  时  $F(h) \sim h$ . 从而存在  $h^*$  使  $F(h^*) = 0$ .

再注意  $F'(h) = 1 - (1 - \sigma) \frac{\rho}{k - \|G\|} h^{-\sigma}$  有唯

一零点  $\hat{h} = \left[ \frac{\rho(1 - \sigma)}{k - \|G\|} \right]^{-\sigma}$  且  $F'(h) =$

$\begin{cases} < 0, h < \hat{h}; \\ > 0, h > \hat{h}. \end{cases}$  即  $F(h)$  于  $(\hat{h}, +\infty)$  是单调上升的, 于

$(0, \hat{h})$  是单调下降的(如图). 从而有

$$F(h) = \begin{cases} < 0, & 0 \leq h < h^*; \\ = 0, & h = h^*; \\ > 0, & h > h^*. \end{cases}$$

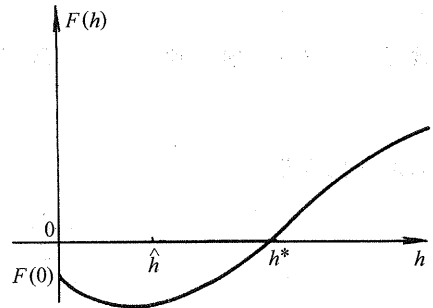


图1 函数  $F(h)$  特征图

但由(2.30)知, 对所有的  $t$  均有  $F(h) \leq 0$ , 则有

$$h(t) \leq h^*,$$

从而

$$\|S(t)\| \leq h^*, \quad t \geq -\tau.$$

由(2.24)有

$$\begin{aligned} S^T(t)\dot{S}(t) &= -kS^T(t)S(t) + S^T(t)GS(t-\tau) - \rho \frac{S^T(t)S(t)}{\|S(t)\|^\sigma} \\ &\leq -k\|S(t)\|^2 + \|G\|\|S(t)\|\|S(t-\tau)\| - \rho\|S(t)\|^{2-\sigma} \\ &\leq \|S(t)\|[-k\|S(t)\| + \|G\|\|S(t-\tau)\|], \end{aligned} \quad (2.31)$$

从而

$$S^T(t)\dot{S}(t) \leq \|S(t)\|[-k\|S(t)\| + h^*\|G\|].$$

由此可知, 只要  $\|S(t)\| \geq \|G\|h^*/k$ , 则有  $S^T\dot{S} < 0$ . 而当  $\|S(t)\| < \|G\|h^*/k$  时, 再由(2.31)有

$$S^T(t)\dot{S}(t) < \|S(t)\|[-k\|S(t)\| + \|G\|\|G\|h^*/k].$$

只要  $\|S(t)\| > (\|G\|/k)^2 h^*$  时, 就有  $S^T(t)\dot{S}(t) < 0$ . 重复上述步骤, 我们可得, 只要  $\|S(t)\| > (\|G\|/k)^m h^*$ ,  $m$  为任意自然数, 就有  $S^T(t)\dot{S}(t) < 0$ .

由条件  $H_3$ ) 及  $m$  的任意性知, 只要  $\|S(t)\| > 0$ , 就有  $S^T(t)\dot{S}(t) < 0$ , 从而对任意的  $S(t) \neq 0$ , 有  $S^T(t)\dot{S}(t) < 0$ .

所以我们有

**定理 2** 若条件  $H_2)$ ,  $H_3)$  成立, 则由(2.21)确定的变结构控制  $u$  使所给切换流形  $S_0$  构成滑动模态区.

最后,我们要给出任意轨线到达滑动模态  $S_0$  上的时间估计.

由(2.31)的第二个不等式有

$$\begin{aligned} S^T(t)\dot{S}(t) &\leq -k\|S(t)\|^2 + \|G\|\|S(t)\|\|S(t-\tau)\| - \rho\|S(t)\|^{2-\sigma} \\ &= \|S(t)\|[-k\|S(t)\| + \|G\|\|S(t-\tau)\|] - \rho\|S(t)\|^{2-\sigma} \end{aligned}$$

由刚才的推导知,在  $H_3$  之下,只要  $S(t) \neq 0$ , 则有

$$-k\|S(t)\| + \|G\|\|S(t-\tau)\| \leq 0,$$

$$\text{从而} \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|S(t)\|^2) = S^T(t)\dot{S}(t) \leq -\rho\|S(t)\|^{2-\sigma}.$$

记  $g(t) = \|S(t)\|^2$ , 则

$$\dot{g}(t) \leq -2\rho g^{\frac{2-\sigma}{2}}(t)$$

或

$$g^{\frac{2-\sigma}{2}}(t)\dot{g}(t) \leq -2\rho.$$

设经时间  $T$  后,轨线到达  $S_0$  上,即  $S(T) = 0$ . 从而由 0 到  $T$  积分上式有

$$\int_{g(0)}^0 g^{\frac{2-\sigma}{2}} dg \leq - \int_0^T 2\rho dt = -2\rho T.$$

而该式的左端为

$$\left. \frac{1}{1 + \frac{\sigma-2}{2}} g^{1+\frac{\sigma-2}{2}} \right|_{g(0)}^0 = -\frac{2}{\sigma} (g(0))^{\frac{\sigma}{2}},$$

从而(2.34)为

$$-\frac{2}{\sigma} (g(0))^{\frac{\sigma}{2}} \leq -2\rho T.$$

即

$$T \leq \frac{1}{\sigma\rho} (g(0))^{\frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{\sigma\rho} \|S(0)\|^\sigma.$$

**定理 3** 若定理 1 和定理 2 的条件成立,则在给定的控制  $u$  下,系统(2.1)任意位的轨线都于有限时间内到达滑动模态区  $S_0$  上. 其时间估计由(2.35)给出.

### 3 例子

考虑滞后控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) + 3x_1(t-\tau) - 0.5x_2(t-\tau) + 1.5x_3(t-\tau) + \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) + 5.5x_2(t) + 3x_2(t-\tau) + 4u_1, \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t) + 0.25x_2(t) + 2u_1. \end{cases}$$

它的向量形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5.5 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \\ x_3(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

显然  $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -0.5 & 1.5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  是奇异的,故不满足[5]中的条件. 对(3.2)记:

$$X_1(t) = x_1(t), \quad X_2(t) = (x_2(t), x_3(t))^T,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

其中

$$\bar{A}_{11} = 2, \quad \bar{A}_{12} = (-1, 1), \quad \bar{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = \begin{pmatrix} 5.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{11} = 3, \\ D_{12} = (-0.5, 1.5), \quad D_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (1, 0), \quad B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

先对(3.2)作代换

$$y = Tx, \quad T = \begin{bmatrix} I_1 & B_1 B_2^{-1} \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则有

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{11}^* y_1(t) + A_{12}^* y_2(t) + \hat{A}_{11} y_1(t - \tau) + \hat{A}_{12} y_2(t - \tau), \\ \dot{y}_2(t) = A_{21}^* y_1(t) + A_{22}^* y_2(t) + \hat{A}_{21} y_1(t - \tau) + \hat{A}_{22} y_2(t - \tau) + B_2 u. \end{cases} \quad (3.3)$$

其中

$$A_{11}^* = 1.5, \quad A_{12}^* = (-\frac{3}{8}, 1), \quad A_{21}^* = (2, 1)^T, \quad A_{22}^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix}; \\ \hat{A}_{11} = 3, \quad \hat{A}_{12} = (0, 1.5), \quad \hat{A}_{21} = (0, 0)^T, \quad \hat{A}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

取  $K = (0, 2)^T$ , 则

$$A_{11} - A_{12}K = 4.5 - (-\frac{23}{8}, \frac{5}{2})(0, 2)^T = 4.5 - 5 = -0.5 < 0,$$

而

$$K\hat{A}_{11} + \hat{A}_{21} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ (K\hat{A}_{12} + \hat{A}_{22})K = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} (0 \quad 1.5) + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

即  $H_2$  满足. 从而可取切换面为

$$S_0 = \{(y_1, y_2)^T, S(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0\}.$$

其中  $C_2^{-1}C_1 = K = (0, 2)^T$ . 而变结构控制器为

$$u = - \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} (0, 1.5) + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] y_1 + \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} (-\frac{3}{8}, 1) + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{pmatrix} \right] y_2 \right. \\ \left. + k C_2^{-1} S(t) + \frac{\rho C_2^{-1} S(t)}{\|S(t)\|^\sigma} \right\} \\ = - \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 + 2k \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + k & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 + k \end{pmatrix} y_2 + \rho \frac{C_2^{-1} S(t)}{\|S(t)\|^\sigma} \right\}.$$

其中

$$k > \|C_2(K\hat{A}_{12} + \hat{A}_{22})C_2^{-1}\| = \left\| C_2 \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} (0, 1.5) + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] C_2^{-1} \right\| = \left\| C_2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} C_2^{-1} \right\| = 3.$$

而  $C_2$  是可供选择的非奇异矩阵. 此时的滑动模运动方程为

$$\dot{y}_1(t) = (A_{11} - A_{12}K)y_1(t) - \tau(\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12}K)y_1(t - \zeta\tau)$$

$$\begin{aligned}
 &= (4.5 - 5)y_1(t) - \tau(3 - (0, 1.5)(0, 2)^T)\dot{y}_1(t - \zeta\tau) \\
 &= -0.5y_1(t).
 \end{aligned}$$

它是渐稳定的.

且从初始位置  $(y_1^0, y_2^0)$  出发的轨线, 经时间  $T$  后必达切换面  $S_0$  上, 其  $T$  有估计

$$T \leq \frac{1}{\sigma\rho} \|C_2(Ky_1^0 + y_2^0)\|^\sigma.$$

#### 4 结束语

我们讨论了时滞控制系统是否存在无时滞的变结构控制器及无时滞的切换面. 无时滞的控制器要比有时滞的控制器相对简单, 从而会给实际设计带来一定方便, 故是具有一定意义的. 显然, 这时所得到的结果只是初步的, 但我们认为无论是对变结构理论的丰富及相应的进一步研究都是有一定的借鉴的.

#### 参 考 文 献

- 1 胡跃明, 周其节. 带有滞后影响的变结构控制. 自动化学报, 1991, 17(5): 587-591
- 2 Fiagbedzi, Y. A. and Pearson, A. E.. An exponential state observer for time-lag system. Int. J. Control, 1992, 55(2): 204
- 3 郑锋, 程勉, 高为炳. 时滞系统的变结构控制及其实现问题. 控制理论与应用, 1994, 11(3): 294-302
- 4 刘永清, 唐功友. 大型动力系统的理论与应用. 卷 4, 广州: 华南理工大学出版社, 1993
- 5 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制. [博士论文]. 广州: 华南理工大学, 1997
- 6 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法. 北京: 科学出版社, 1996

## Variable Structure Controller without Delay of Control System with Delay

XIE Shengli, XIE Zhendong and LIU Yongqing

(Department of Automatic Control Engineering, South China University of Technology • Guangzhou, 51064)

**Abstract:** In this paper, the contrivance problem of variable structure controller without delay system with delay is discussed and the contrivance method, alien from usual, of variable structure controller in a function space but not in a functional space are given. An example is given to illustrate the application of the obtained results.

**Key words:** delay; control system; variable structure; controller without delay

#### 本文作者简介

**谢胜利** 1957年生. 控制理论与控制工程博士; 曾在华南理工大学电子与信息工程学院进行通信与电子学工作, 现为华南理工大学电子与信息工程学院无线电与自动控制研究所教授. 1986年以来, 于振动性理论、稳定性理论与应用、通信回波消除理论等领域在国内外学术刊物上发表论文 60 多篇. 目前感兴趣的领域为: 滞后分布参数系统、滞后 2D 离散系统的稳定与变结构控制; 非线性系统学习控制; 机器人系统; 自适应回波消除等.

**谢振东** 见本刊 1998 年第 5 期第 700 页.

**刘永清** 见本刊 1998 年第 1 期 124 页.