

连铸方坯的二冷水控制问题

孙 冀

潘德惠

(西北工业大学 I 系·西安, 710072) (东北大学信息科学与工程学院·沈阳, 110006)

摘要: 对连铸过程二冷水控制问题进行了讨论; 将二维凝固温度场的边界控制问题, 用线性化方法将原问题等价地转化为在几个 Randon 测度空间求最优测度的有限维线性优化问题, 从而得到全局最优控制律. 数值试验显示此方法是有效的.

关键词: 连铸模型; 凝固温度场; 优化; 测度理论; 控制

Control Problem of Second Cooling Water for Square Ingot in Continuous Casting of Steel

Sun Ji

(Department I, Northwestern Industry University·Xi'an, 710072, P. R. China)

Pan Dehui

(College of Information Science and Engineering, Northeastern University·Shenyang, 110006, P. R. China)

Abstract: In this paper, a cooling water control problem in the process of continuous casting of steel is discussed; the boundary control problem of 2-dimensional solidification temperature field is modified into one consisting of the minimization of a linear form over a set of positive measures satisfying linear constraints. The minimization in the new problem is global and can be approximated by a finite-dimensional linear programming problem. A nearly optimal control is constructed. A simulation is given to illustrate the procedure.

Key words: continuous casting of steel; solidification temperature field; optimization; measure theory; control

1 背景和模型 (Background and model)

在钢铁工业连铸过程中, 轧制温度是影响钢材质量的重要因素. 铸坯从结晶器拉出后, 通过冷却水对铸坯表面进行喷淋, 以达到降温的目的, 由于铸坯在结晶器内并未完全凝固, 只是形成一个凝壳, 其内部仍是熔融状钢水; 而冷却控制的任务是使铸坯完全凝固, 并使终态达到理想的温度分布.

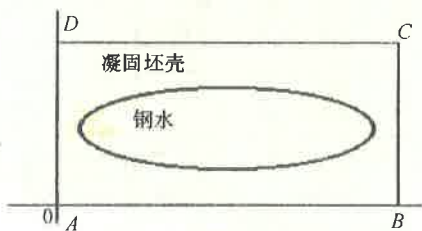


图 1 连铸坯截面图
Fig. 1 Section of billet

考虑方坯连铸的情况, 其截面如图 1 所示. 连铸坯匀速经过二冷区, 忽视延其运行 (拉坯) 方向的热传导. 可在铸坯的一个截面上建立如下热传导控制模型:

$$\frac{\partial H(u)}{\partial t} = K \Delta u(x, y, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial \Omega} = v(s, t). \quad (3)$$

其中, $(x, y, t) \in \Omega \times (0, T)$, K 是平均导热系数; $H(\cdot)$ 是热焓函数, 为一非线性可微函数且当 $u < T_m$ (T_m 为熔点温度) 时 $H(u) = u$. 而 $v(s, t)$ 为边界控制量, 满足: $V_0 \leq v(s, t) \leq V_1$, 其中 V_0, V_1 为两常数; 记 $V = [V_0, V_1]$, $\Gamma = \partial \Omega$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \partial \Omega \times (0, T)$.

根据实际背景, 我们给出如下最优指标:

$$J(u, v) = \int_{\Omega} |u(x, y, T) - f(x, y)| dx dy, \quad (4)$$

其中, $f(x, y)$ 为铸坯理想温度分布, 其值给定, 目的是确定 v 使得在 T 时刻泛函 $J(u, v)$ 的值最小. 为讨论方便记: $f_0 = u(x, y, T) - f(x, y)$.

本文将采用逐片线性化的方法处理此最优控制问题. 此方法最早是由 Young^[1]提出的, 后经过 Rubio

等人对此方法做了系统发展^[2,3].其本质是将经典的变分问题,利用线性分析的方法转化为在几个测度空间中寻找最优测度的线性优化问题;其优点在于:所化成的线性测度问题总存在最小元,且最优解是全局的,控制方法在工程上容易实现.其代价是:与之相联系的测度问题是无穷维的,即整个过程是渐近近似过程,限制方程的个数是无穷多个.

我们给出系统(1)~(3)的弱解形式(5),当初值 u_0 及边界控制量 v 分段连续时,可以证明方程(1)~(3)存在唯一弱解^[4,5].若控制函数 v 在 Γ_T 上分段连续, u 为其弱解;则称 (u, v) 为允许对.记 F 为所有允许对 (u, v) 所成的集合.

$$\int_0^T \int_{\Omega} [H(u)\phi_t + u\Delta\phi] d\Omega dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} v\phi ds dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} u ds dt - \int_{\Omega} \phi(x, y, T) H(u(x, y, T)) d\Omega - \int_{\Omega} \phi(x, y, 0) H(u(x, y, 0)) d\Omega \triangleq \alpha_{\phi}. \quad (5)$$

其中,试验函数 $\phi \in C^2(\Omega) \times C^1(0, T)$.

由于 v 有界,存在有界集 $A \subset \mathbb{R}$,使得: $u(x, y, t) \in A$,对任意的 $(x, y, t) \in \Omega \times [0, T]$;因有许多这样的集合,设 A 为其中最前者;这点在以后的证明和计算中很重要.

2 问题的转换(Metamorphosis)

我们知道通常情况下(4)在 F 下最小元不一定存在,也即不能给出最小元存在的必要条件.以下对上述问题进行转化;寻找次优控制对.

考虑任一允许对 (u, v) ,对固定的 u 及 v 分别在空间 $C(\Lambda)$ 及 $C(\Theta)$ 上定义了一个线性有界连续泛函(6),(7).这里, $\Lambda = A \times Q_T$, $\Theta = V \times \Gamma_T$.

$$u(\cdot, \cdot, \cdot): F \rightarrow \int_{Q_T} F(u(x, y, t), x, y, t) dx dy dt, \quad (6)$$

$$v(\cdot, \cdot): G \rightarrow \int_{\Gamma_T} G(v(s, t), s, t) ds dt. \quad (7)$$

由于 Riesz A. Markov S. Kakutani^[6]定理允许对 (u, v) 由(6),(7)可定义两个 Radon 正测度 μ, ν .即

$$\int_{Q_T} F(u(x, y, t), x, t) dx dt = \int_{\Lambda} F d\mu \triangleq \mu(F), \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_T} G(v(s, t), s, t) ds dt = \int_{\Theta} G dv \triangleq \nu(G). \quad (9)$$

注意到(5)式中积分 $\int_{\Omega} \phi(x, y, T) H(u(x, y, T)) d\Omega$

及 $\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} u ds dt$ 中 u 与(5)式左边第一项中 u 的相

关性,将这两式化为 Q_T 上的积分形式:

$$\int_{\Omega} \phi(x, y, T) H(u(x, y, T)) d\Omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{T-\Delta t}^T \int_{\Omega} \phi(x, y, t) H(u(x, y, t)) dx dy dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^T \int_{\Omega} \phi(x, y, t) H(u(x, y, t)) \chi_T(t) dx dy dt. \quad (10)$$

其中 $x_T(t)$ 为在 $(T-\Delta t, T]$ 为1,在 $[0, T-\Delta t)$ 上速降为零的连续函数.而对 $\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} u ds dt$,可在 Ω 内做一区域 Ω' ,其边界 Γ' 到 Γ 的距离为 r ;我们在此仅考虑图1中 AB 上的积分,注意到: $\frac{\partial\phi}{\partial n} |_{AB} = -\phi'_y(x, y, t) |_{y=0}$,则有:

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi}{\partial n} u ds dt = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^T \int_{\Omega} \Phi(x, y, t) u(x, y, t) \chi_r dx dy dt. \quad (11)$$

这里, $\Phi(x, y, t)$ 由 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 决定; χ_r 为在 $\Omega - \Omega'$ 上取值为1,在 Ω' 内速降为零的函数.那么,(5)可表示为:

$$\int_{\Lambda} F_{\phi} d\mu + \int_{\Theta} G_{\phi} dv - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Lambda} Q_{\phi} d\mu - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Lambda} P_{\phi} d\mu = \alpha_{\phi}, \quad (12)$$

即

$$\mu(F_{\phi}) + \nu(G_{\phi}) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(Q_{\phi}) - \lim_{r \rightarrow 0} \mu(P_{\phi}) = \alpha_{\phi}, \quad (13)$$

其中 $F_{\phi} = u\Delta\phi(x, y, t) + H(u)\phi_t(x, y, t)$,

$$G_{\phi} = v\phi(x, y, t),$$

$$P_{\phi} = u\Phi(x, y, t)\chi_r(x, y)/r,$$

$$Q_{\phi} = \phi(x, y, t)H(u)\chi_r/\Delta t.$$

与 $\int_{\Omega} \phi(x, y, T) H(u(x, y, T)) d\Omega$ 的处理相同,泛函(4)化为

$$I(\mu, \nu) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_r) / \Delta t. \quad (14)$$

记: $Q = \{(\mu, \nu): (\mu, \nu) \in M^+(\Lambda) \times M^+(\Theta)$ 且满足(12)};这里 $M^+(\Lambda) \times M^+(\Theta)$ 为 $\Lambda \times \Theta$ 上 Radon 正测度.显然,这些测度还具有性质:

1) 当 $\xi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$,若 ξ 只与 (x, t) 相关,那么 $\mu(\xi)$ 为 ξ 在 Q_T 上的 Lebesgue 积分;即

$$\mu(\xi) = \int_{Q_T} \xi(x, y, t) dx dt = \alpha_{\xi}. \quad (15)$$

2) 当 $\zeta: \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ 若 ζ 只与 (s, t) 相关,那么 $\nu(\zeta)$ 为 ζ 在 Γ_T 上的 Lebesgue 积分;即

$$v(\zeta) = \int_{\Gamma_T} \delta(s, t) ds dt = b_\delta. \quad (16)$$

3 近似方法 (Approximation method)

至此,原问题转化为在测度空间上寻找最优测度对的测度问题;即找满足条件(13)及(15),(16)的测度对 (μ^*, v^*) 使得 $I(\mu, v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_t) / \Delta t$ 最小. 下面将讨论极小元的存在性及问题的有限维近似.

为讨论测度问题极小元的存在性,对测度空间 $M^+(\Lambda) \times M^+(\Theta)$ 赋予弱* 拓扑,当给定弱* 拓扑线性空间将成为局部凸拓扑向量空间;可保证 Q 的紧性及目标泛函 $(\mu, v) \rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_t) / \Delta t$ 的连续性. 记 S 为 $M^+(\Lambda) \times M^+(\Theta)$ 中满足(12),(15),(16)的测度对所成的集合. 下面给出几个命题:

命题 1 在 S 中存在最优测度对 (μ^*, v^*) 使 $I(\mu, v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_t) / \Delta t$ 在 S 中为最小.

由定理 II. 1, Rubio^[2, Ch2, pp16]; 很容易得到此结论. 而同文[3]定理 7.1 的证明有命题 2 成立.

命题 2 集合 $S_1 \subset S$ 是由逐片常函数控制对 (u, v) 产生并满足弱解方程(12) 及限制条件(15),(16) 的测度集合在 S 中是弱* 稠密的.

我们已把原问题转化成集合 S 上的无穷维线性最小化问题;但在实际计算中只能在有限维空间中进行,以下将讨论如何实现问题的有限维近似;先讨论约束条件的有限化.

由于在 $C^2(\Omega) \times C^1(0, T)$ 中存在可数集 $\{\phi_i\}$ 使其在下述意义成为一组基: 对任意 $\phi \in C^2(\Omega) \times C^1(0, T)$ 及 $\epsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$ 及数 $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, N$; 使得

$$\max_{Q_T} \left\{ \left| \phi - \sum_{i=1}^N \sigma_i \phi_i \right|, \left| \phi_t - \sum_{i=1}^N \sigma_i \phi_{it} \right|, \left| \Delta \phi - \sum_{i=1}^N \sigma_i \Delta \phi_i \right| \right\} < \epsilon,$$

从而有:

命题 3 设 M_1, M_2, M_3 是正整数;最小化问题 $I(\mu, \eta) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_t) / \Delta t$ 在集 $S(M_1, M_2, M_3) \subset M^+(\Lambda) \times M^+(\Theta)$ 并满足下列条件:

$$\mu(F_{\phi_i}) + v(G_{\phi_i}) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Lambda} Q_{\phi} d\mu - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\Lambda} P_{\phi} d\mu = \alpha_{\phi_i}, i = 1, 2, \dots, M_1. \quad (17a)$$

$$\mu(\xi_i) = a_i, i = 1, 2, \dots, M_2. \quad (17b)$$

$$v(\zeta_i) = b_i, i = 1, 2, \dots, M_3. \quad (17c)$$

那么当 $M_i \rightarrow \infty (i = 1, 2, 3)$ 时有 $\inf_{S(M_1, M_2, M_3)} [I(\mu, v)]$

$$\rightarrow \inf_S [I(\mu, v)].$$

由命题 3, 可用有限个约束条件来近似原问题, 但 (μ, v) 所在的空间 $S(M_1, M_2, M_3)$ 仍是无穷维的; 这时原问题为一个半无限的线性优化问题; 在本节的最后, 将采用逐片常控制方法实现问题的完全有限化. 我们把由逐片常控制 v 所对应的状态量记为 u_v ; 设 (u_v, v) 所对应的测度对满足命题 3 的限制条件; 并记相应的测度对为 (μ_v, v_v) . 由命题 3 首先可得到满足命题 3 条件(17) 的最优对 (μ^*, v^*) ; 由命题 2, 利用稠性可实现由逐片常控制所产生的测度对 (μ_v, v_v) 对 (μ^*, v^*) 的近似(只要对逐片常控制对划分充分细). 把由逐片常控制并满足命题 3 的限制条件(17) 的测度对记为: (μ_{u_v}, v_{u_v}) . 最后将证明: 当 $M_i, i = 1, 2, 3$. 趋于无穷时 $\inf_{S(M_1, M_2, M_3)} I(\mu_{u_v}, v_{u_v}) \rightarrow \inf_S I(\mu, v)$. 下面给出本节的主要定理及其证明.

定理 设 (u_v, v) 是由上述方式构成的逐片常控制对, 则

- 1) (u_v, v) 满足弱解方程(5).
- 2) 当 $M_i \rightarrow \infty (i = 1, 2, 3)$ 时, $J(u_v, v) = \inf_{S(M_1, M_2, M_3)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_{u_v}(f_0 \chi_t) / \Delta t \rightarrow \inf_S I(\mu, v)$.

证 对任意的 $\epsilon > 0$; 设 (μ^*, v^*) 是 $I(\mu, v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(f_0 \chi_t) / \Delta t$ 在 $S(M_1, M_2, M_3)$ 中的极小元, 与命题 1 的证明相仿可以证明这样的极小元是存在的. 由 S_1 在 S 中稠, 可以找到逐片常控制测度对 $(\mu_v, v) \in S_1$ 使得:

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_v(f_0 \chi_t) / \Delta t - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu^*(f_0 \chi_t) / \Delta t \right| < \epsilon / 8, \quad (18)$$

$$\left| \mu_v(F_{\phi}) + v(G_{\phi}) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu(P_{\phi}) - \lim_{r \rightarrow 0} \mu(Q_{\phi}) - \alpha_{\phi} \right| < \epsilon / 8, \quad (19)$$

1) 先证明 u_v 是方程(1) ~ (3) 的弱解. 由 u_v 的构造, u_v 对每个 $\phi_i \in C^2(\Omega) \times C^1([0, T]), i = 1, 2, \dots, M_1$, 满足弱解方程(5); 由 $\{\phi_i\}$ 可在下述意义下成为空间 $C^2(\Omega) \times C^1([0, T])$ 的一组基: 即对任意的 $\phi \in C^2(\Omega) \times C^1([0, T])$, 存在整数 N 及 $\sigma_i \in \mathbb{R}$ 使得 $\phi = \sum_{i=1}^N \sigma_i \phi_i$, 那么如果择 $M_1 > N$, 则有 u_v 使得弱解方程(5) 成立.

2) 定理的第二部分, 即证对任意的 $\epsilon > 0$, 当 $M_i \rightarrow \infty$ 时, $i = 1, 2, 3$.

$$\left| J(u_v, v) - \inf_S I(\mu, v) \right| < \epsilon, \quad (20)$$

$$\left| J(u_v, v) - \inf_S I(\mu, v) \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i}(f_0 \chi_T) - \mu^*(f_0 \chi_T)) / \Delta t \right| \leq \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i}(f_0 \chi_T) - \mu_v(f_0 \chi_T)) / \Delta t \right| + \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i}(f_0 \chi_T) - \mu^*(f_0 \chi_T)) / \Delta t \right| \leq \\
& \varepsilon/8 + \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i}(f_0 \chi_T) - \mu_v(f_0 \chi_T)) / \Delta t \right|. \quad (21)
\end{aligned}$$

下证 $\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_{u_i}(f_0 \chi_T) / \Delta t - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_v(f_0 \chi_T) / \Delta t \right| \leq \varepsilon/2$. 由 f_0 的定义, 即 $f_0(u) = |u(x, T) - f(x)|$; 不失一般性, 不妨设 $u \geq 0$.

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(f_0 \chi_T) \right| \leq \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u \chi_T) \right| + \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(f(\chi) \chi_T) \right|, \quad (22)
\end{aligned}$$

现证对 $\varepsilon > 0$, 有

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u \chi_T) \right| < \varepsilon/4, \quad (23)$$

注意到:

$$\begin{aligned}
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u \chi_T) \right| \leq \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u \chi_T (\phi - 1)) \right| + \\
& \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(\phi \chi_T) \right|, \quad (24)
\end{aligned}$$

对任意 $\phi \in C^2(\Omega) \times C^1([0, T])$; 由本定理的第一部分, 当 $M_i \rightarrow \infty$ 时, $i = 1, 2, 3$; u_i 满足关于 ϕ 的弱解方程, 从而有:

$$\begin{aligned}
& \left| (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\phi) + (v_{u_i} - v)(G_\phi) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(Q_\phi) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(P_\phi) \right| < \varepsilon/8, \quad (25)
\end{aligned}$$

将 ϕ 分解为, $\phi(x, y, t) = \varphi(x, y, t) + \chi(x, y, t)$;

其中 $\varphi(x, t)$ 满足 $\varphi(x, y, T) = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\partial \Omega} = 0$;

$\varphi |_{\partial \Omega} = 0$; 且 $\chi(x, y, t)$ 在 Q_T 中支集的 Lebesgue

测度小于 $\varepsilon_1 > 0$, 并使得 $|\chi_t|$ 及 $|\Delta \chi|$ 小于正常数

ρ . 由 $\chi(x, y, t)$ 在 Q_T 中支集的 Lebesgue 测度小于

ε_1 及 $|\chi_t|$ 和 $|\Delta \chi|$ 小于正常数 ρ , 并注意到 $F_\chi =$

$u \Delta \chi + H(u) \chi_t$, 若设 $H(u)$ 的界为 L ; 则有: $|\mu_{u_i} -$

$\mu_v)(F_\chi) | \leq \varepsilon_1 \cdot \rho | \text{diam} A + L |$. 由(25)式中 ϕ 的任意性, 当 $M_i \rightarrow \infty$ 时, 适当选取 ρ, ε_1 总可使下式成立:

$$\begin{aligned}
& \left| (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\phi) \right| = \left| (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\varphi) + (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\chi) \right| \leq \\
& \left| (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\varphi) \right| + \left| (\mu_{u_i} - \mu_v)(F_\chi) \right| < \varepsilon/8,
\end{aligned}$$

从而由(25)式, 对任意的 ϕ 有下式成立:

$$\left| (v_{u_i} - v)(G_\phi) - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(Q_\phi) - \right.$$

$$\left. \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(P_\phi) \right| < \varepsilon/4. \quad (26)$$

由(26)式, 利用同样的方法可得证:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(Q_\phi) < \varepsilon/4, \quad (27)$$

$$\text{即 } \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(H(u) \phi \chi_T / \Delta t) \right| =$$

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u \phi \chi_T(t) / \Delta t) \right| < \varepsilon/4, \quad (28)$$

这里用到 $u(x, y, t) < T_m$ 时, $H(u) = u$; 由 ϕ 的任意性, 同样有:

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mu_{u_i} - \mu_v)(u(\phi - 1) \chi_T / \Delta t) \right| < \varepsilon/4, \quad (29)$$

而对(22)式中的第二项, 由 $f(x, y)$ 与 u, v 无关及(15)式, 可得到:

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mu_{u_i} - \mu_v)(f_0(x, y) \chi_T) \right| = 0, \quad (30)$$

从而有 $\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_{u_i}(f_0 \chi_T) / \Delta t - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mu_v(f_0 \chi_T) / \Delta t \right| \leq$

$\varepsilon/2$; 即(20)成立. 证毕.

4 算法与仿真 (Algorithm and simulation)

在这里取区域 Ω 为长 2 米, 宽 0.5 米的长方形, 即 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 0.5\}$; 平均导热系数 $K = 30 \text{ Wm} \cdot \text{C}$; 凝固温度 $T_m = 1450 \text{ C}$; 比热 $c = 670 \text{ J/kg} \cdot \text{C}$; 凝固潜热 $L = 27 \times 10^4 \text{ J/kg}$; 控制过程时间 $T = 300 \text{ s}$; 材料密度 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$; 由于在计算中以离散的形式进行, 所以初值 $u_0(x, y)$ 我们以如下形式给出:

$$u_0(x, y) = \begin{cases} 1450, & (x, y) \in \Omega_0, \\ 1350, & (x, y) \in \Omega - \Omega_0. \end{cases}$$

其中

$$\Omega_0 = \{(x, y) \mid 0.4 \leq x \leq 1.6; 0.1 \leq y \leq 0.4\}.$$

若设:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \mid 0.8 \leq x \leq 1.2; 0.2 \leq y \leq 0.3\}.$$

目标函数 f_0 也以离散的形式给出.

$$f_0(x, y) = \begin{cases} 900, & (x, y) \in \Omega_1, \\ 850, & (x, y) \in \Omega_0 - \Omega_1, \\ 800, & (x, y) \in \Omega - \Omega_0, \end{cases}$$

热焓函数

$$H(u) = \begin{cases} c\rho u, & u < T_m, \\ c\rho u + L\rho, & u \geq T_m. \end{cases}$$

并且 $A = [800, 1450]$, 控制量 $v \in [-120, 0] \text{ kJ/m}^2 \cdot \text{s}$.

具体算法可由以下几步构成.

1) 对 Λ, Θ 进行分解. 将空间 $\Lambda = A \times Q_T$, 分成 1250 个单元. 其中 $A = \bigcup_{i=1}^5 [u_{i-1}, u_i], [0, T] = \bigcup_{i=1}^5 [t_{i-1}, t_i]$, 沿 x, y 方向分别 10, 5 等分, 得到 $\Omega = \bigcup_{l=1}^{50} \Omega_l$. 设每

个子单元 $\Delta_j = [u_{k-1}, u_k] \times \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i]$ 所对应的 Radon 测度为 β_j , 并设在 Δ_j 所取的常值点为 $D_i = (u'_j, t'_j, x'_j, y'_j)$; 其中 $u'_j \in [u_{k-1}, u_k], t'_j \in [t_{i-1}, t_i], (x, y)'_j \in \Omega_i$; 同样对 $\Theta = V \times \Gamma_T$ 进行类似的分解, 若将 V 所在区间 5 等分, 将边界沿 x 方向 5 等分沿 y 方向 3 等分; 则 Θ 被化分为 400 个子域 Θ_j ; 并设相应的测度及取值分别为 γ_j 及 T_j . 取 $r = 0.2; \Delta t = 60$.

2) 对每个子单元进行统一的编号, $\Delta_j = \Delta_{250i+50k+10m+n}, i = 0, 1, \dots, 4; k = 0, 1, \dots, 4; m = 0, 1, \dots, 4; n = 1, 2, \dots, 10$. 同样可对 Θ_j 进行统一的编号, 以便于以后的计算.

3) 原问题化为求 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{1250}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{400}\}$ 使

$$\frac{1}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{1250} \beta_j f_0(D_j) x_T(D_j), \quad (31)$$

在限制条件(即命题 4 限制条件下):

$$\sum_{j=1}^{1250} \beta_j F_{\phi_i}(D_j) + \sum_{j=1}^{400} \gamma_j G_{\phi_j}(T_j) + \sum_{j=1}^{1250} P_{\phi_i}(D_j) \beta_j + \sum_{j=1}^{1250} Q_{\phi_j}(D_j) \beta_j = \alpha_{\phi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M_1, \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^{N_1} \beta_j \xi_i(D_j) = \alpha_{\xi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M_2.$$

$$\sum_{j=1}^{N_2} \gamma_j \delta_i(T_j) = b_{\delta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, M_3. \quad (33)$$

下为最小的 1650 个变元, 357 个限制条件的线性优化问题. 这里 $\phi \in C^2(\Omega) \times C^1(0, T), \xi_i, \zeta_i$ 分别为满足(15)、(16)条件的实验函数; 在此, 我们取 ξ_i 为子区域 $\Omega_k[t_{i-1}, t_i]$ 上的特征函数共 250 个, 即 $M_2 = 250$; ζ_i 为子区域 $[s_{k-1}, s_k] \times [t_{i-1}, t_i]$ 上的特征函数, 共有 80 个, 即 $M_3 = 80$. 而 $\phi = t^p \sin(mx) \cos(ny), p = 0, 1, 2; m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3$; 共 27 个函数. 可以证明此线性优化问题存在极小元且极小点上非零元的个数不超过限制方程的个数 $M_0^{[7]}$; 解此 1650 个变元, 357 个限制条件的线性优化问题, 可得到 $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{1250}; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{400}\}$.

4) 由 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{400}$ 确定 $v(s, t)$; 下面给出由 γ_j 确定 v 的方法, 即如何确定在时间段 $[t_{i-1}, t_i]$, 边界 $[s_{k-1}, s_k]$ 上控制量 v 的取值. 由 γ_j 的构造, 将有如下两种可能: i) 若在 $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{k-1}, s_k]$ 上, 空间 $V \times [t_{i-1}, t_i] \times [s_{k-1}, s_k]$ 中只有一个元素 γ_j 与之对应, 则 γ_j 所对应的 V_m 即为在时刻 $[t_{i-1}, t_i]$ 边界 $[s_{k-1}, s_k]$ 上的控制量. ii) 若空间 $V \times [t_{i-1}, t_i] \times [s_{k-1}, s_k]$ 中有多个非零元素 γ_j 与之对应; 则这些 γ_j

之和必等于区间面积 $\Delta S = (t_i - t_{i-1})(s_i - s_{k-1})$; 这时可在 $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{k-1}, s_k]$ 的每个子区间上按 i) 方法求得控制量.

最后, 我们得到计算结果控制量如图 2 所示, 图中长为 5 的边界由 A 点出发.

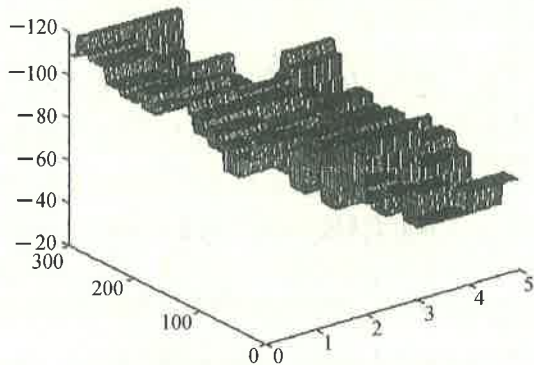


图 2 控制函数图

Fig. 2 Graph of the control v

4 结论(Conclusion)

本文讨论了钢铁工业连铸过程二冷水的逐片常控制方法, 将原问题等价地转化为在几个 Radon 测度空间上求最优测度的有限维线性优化问题, 从而得到工程上易于实现的控制律. 同时, 此方法可推广处理其它非线性系统的控制问题.

参考文献(References)

- Young L C. Calculus of Variations and Optimal Control Theory. Philadelphia; Sanders, 1969
- Rubio J E. Control and Optimization; The Linear Treatment of Nonlinear Problem. New York and London; Manchester and John Wiley, 1986
- Kamyad A, Rubio J E and Wilson D A. An optimal control problem for the multidimensional diffusion equation with a general control variable. J. Optimiz. Theor. & Appl., 1992, 75(2): 211 - 230
- Crank J. Free and Moving Boundary Problems. Oxford; Clarendon Press, 1984
- Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. New York; Printice-Hall. Inc, 1964
- Holmos P R. Measure Theory. Chelsea; van Nosttrand, 1950
- Gass S I. Linear Programming Methods and Applications. New York; McGraw-Hill, 1975

本文作者简介

孙 冀 1963 年生. 1984 年毕业于河北师范大学数学系, 获理学学士学位, 1990 年在兰州大学数学系获理学硕士学位, 于 1998 年在东北大学信息学院获博士学位. 目前在西北工业大学工系做博士后研究工作. 主要研究方向是分布参数系统的建模, 辨识, 最优控制及应用研究.

潘德惠 1928 年生. 1949 年毕业于东北大学理学院, 现为东北大学工商管理学院教授, 自动控制系统控制理论与应用专业博士生导师, 中国数学会理事, 曾多年从事应用数学的研究, 现在研究领域是分布参数系统的辨识和最优控制.