MIMO 系统具有不可分离约束时参数的最小二乘估计

许茂增
(重庆交通学院运输管理系·重庆,400074)
程昌华
(重庆交通学院港口与航道工程系·重庆,400074)

摘要:在阐述了多输入多输出(MIMO)系统具有不可分离约束时参数的最小二乘估计问题之后,利用扩维技术和拉格朗日乘子法,给出了系统参数的最小二乘估计,分析了其结构,讨论了参数估计的计算和参数的统计性质.

关键词:MIMO 系统;不可分离约束;扩维技术;最小二乘估计

The Least Squares Parameter Estimation of MIMO Systems with Constraints on Parameters of Different Equations

Xu Maozeng
(Department of Transportation Management Engineering, Chongqing University of Communications·Chongqing, 630074, P. R. China)
Cheng Changhua
(Department of Harbour and Waterway Engineering, Chongqing University of Communications·Chongqing, 630074, P. R. China)

Abstract: After formulating the parameters estimation problem of MIMO system with constraints on parameters of different equations, the least squares estimates of parameters of the system are obtained by using vector-dimemsion-augmenting technique and the method of Lagrange multipliers. Based on the structural analysis of the estimation formula, the computation and statities properties of parameters estimates are discussed.

Key words: MIMO system; constraint; vector-dimension-augmenting technique; least squares estimation

1 引言(Introduction)

离散线性时不变 MIMO 系统可一般地表示为

$$y_i(k+1) = A(q^{-1})y(k) + B(q^{-1})u(k) + \varepsilon(k), \tag{1.1a}$$

式中 k 为离散流动时标;y 和 u 分别为系统的 n 维输出向量和 m 维输入向量;q^{-1} 为一步滞后算子,$A(q^{-1})$ 和 $B(q^{-1})$ 为 q^{-1} 的多项式矩阵;ε 为系统的 n 维综合误差向量,对于确定性系统,可取 $\varepsilon(k)$ 恒等于零,对于不确定性系统,常假定 $\{\varepsilon(k)\}$ 为 n 维向量白噪声序列. 在本文讨论中,总假定 $\{\varepsilon(k)\}$ 为白色序列,且对所有 $k, j > 0$,均有

$$\mathrm{E}(\varepsilon(k)) = 0, \tag{1.1b}$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon(k)) = \mathrm{diag}(\delta_i^2), \tag{1.1c}$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon(k), \varepsilon(j)) = 0. \tag{1.1d}$$

系统(1.1)具有输出和参数可分离的形式[1],所以其参数估计习惯上常用分解方法,即把 n 个方程的参数估计问题按 n 个独立的单输出多输入系统进行处理. 采用这种方法,对任何一个系统参数的估计也没有造成信息损失,因而参数估计精度与把(1.1)作为一个整体进行参数估计时相同,但这样做简化了计算,降低了对计算机的要求,故在系统控制领域尤其是在自校正控制中得到了广泛的应用.

进一步,如果系统(1.1)的参数间受到了约束,而每个约束仅限于 n 个方程中同一方程的参数之间,不同方程的参数之间并不构成约束,那么仍可采用分解方法来简化系统方程的参数估计,只是此时单个方程的参数估计,需按约束的情况进行处理. 关于这方面,可参考文献[2,3].

然而,如果系统(1.1)不同方程的参数间形成了约束,分解估计方法将不再适用. 这类问题本文称之为不可分离约束问题,或交叉约束问题. 它的一个实际背景是路网数据分析[4]. 在目前可以看到的文献中,尚未看到对这类问题的讨论,限于这类问题的多样性和复杂性,本文讨论不可分离等式约束条件下系统(1.1)的参数估计.

2 问题阐述(Problem formulation)

考虑系统(1.1),为了方便参数估计,把(1.1a)改写成下述形式:

本文于 1995 年 9 月 25 日收到,1998 年 4 月 13 日收到修改稿.

$$y_i(k+1) = X_i(k)a_i + \varepsilon_i(k), i = 1,2,3,\cdots,n. \tag{2.1a}$$

其中 y_i 和 ε_i 分别为 y 和 ε 的第 i 个分量,列向量 a_i 为第 i 个方程的参数向量,行向量 $X_i(k)$ 为相应的数据向量,它由 $y(k)$ 和 $u(k)$ 生成.

对于(2.1a)或等价的(1.1a),假定其参数受到下述线性等式约束:

$$h_i\alpha_i = c_i, \quad i = 1,2,3,\cdots,s. \tag{2.1b}$$

式中 α_i 为系统参数构成的 m_i 维列向量,h_i 为已知的 m_i 维行向量,c_i 为一已知的常数,s 为约束个数.我们说(2.1b)中参数的不可分离约束,如果至少存在一个 $\alpha_{i0}(1 \leqslant i_0 \leqslant s)$,其元素不属于(2.1a)中的同一方程.

设 N 为观测次数,$\hat{X}$ 为 X 的估计.所谓系统(2.1a)在不可分离约束(2.1)条件下的最小二乘估计问题,就是要寻找 $\hat{A}(q^{-1})$ 和 $\hat{B}(q^{-1})$ 或 $\hat{a}_i(i = 1,2,3,\cdots,n)$,它们满足约束条件(2.1b),同时又使误差平方和 ESS 达到极小,即

$$\begin{aligned}\mathrm{ESS} = &\sum_{k=0}^{N-1}(y(k+1) - \hat{A}(q^{-1})y(k) - \\ &\hat{B}(q^{-1})u(k))^\tau(y(k+1) - \\ &\hat{A}(q^{-1})y(k) - \hat{B}(q^{-1})u(k)) = \\ &\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i(k) - X_i(k-1)\hat{a}_i)^2 = \min.\end{aligned} \tag{2.1c}$$

τ 表示向量或矩阵转置.这里要注意,a_i 的维数是由 $\hat{A}(q^{-1})$ 和 $\hat{B}(q^{-1})$ 的阶次和系数阵中已知零元素的个数和位置决定的,因此,在以后的讨论中总假定系统的结构参数已知,同时假定 a_i 中不包含零元素.

3 最小二乘估计式的推导(Derivation of the least squares parameter estimation)

下面将运用扩维技术,求解约束最小二乘估计问题(2.1),从而给出系统(2.1a)在约束条件(2.1b)下的最小二乘估计.为此,我们设

$$y_i(1,N) = (y_i(1),y_i(2),\cdots,y_i(N))^\tau, \tag{3.1a}$$

$$X_i(0,N-1) = (X^\tau(0),\cdots,X_i^\tau(N-1))^\tau, \tag{3.1b}$$

于是可把 ESS 改写成

$$\begin{aligned}\mathrm{ESS} = &\sum_{i=1}(y_i(1,N) - X_i(0,N-1)\hat{a}_i)^\tau(y_i(1,N) - \\ &X_i(0,N-1)\hat{a}_i),\end{aligned}$$

又设

$$a = (a_1^\tau\ a_2^\tau\ a_3^\tau \cdots\ a_n^\tau)^\tau, \tag{3.3}$$

$$a_i = A_i a, \tag{3.4}$$

这里的矩阵 A_i 具有下述结构形式:

$$A_i = (0\,0\,0 \cdots 0\ I_i\ 0\,0\,0 \cdots 0), \tag{3.5}$$

式中的 I_i 为阶数与 a_i 维数相同的单位矩阵,把(3.3)式中和(3.4)式代入(3.2)式,我们得到如下规范的误差平方和:

$$\begin{aligned}\mathrm{ESS} = &\sum_{i=1}^{n}(y_i(1,N) - X_{ia}(0,N-1)\hat{a})^\tau(y_i(1,N) - \\ &X_{ia}X_i(0,N-1)\hat{a}),\end{aligned} \tag{3.6}$$

式中

$$X_{ia}(0,N-1) = X_i(0,N-1)A_i. \tag{3.7}$$

为把约束条件(2.1b)规范化,我们设

$$h_i\alpha_i = B_i a_i, \quad i = 1,2,3,\cdots,s, \tag{3.8}$$

于是便有

$$h_i\alpha_i = h_iB_ia_i = c_i, \quad i = 1,2,3,\cdots,s. \tag{3.9}$$

又设

$$f_i = h_iB_i, \quad i = 1,2,3,\cdots,s, \tag{3.10a}$$

$$F = (f_1^\tau\ f_2^\tau\ f_3^\tau\ \cdots\ f_s^\tau)^\tau, \tag{3.10b}$$

$$C = (c_1\ c_2 \cdots c_s)^\tau, \tag{3.10c}$$

则不可分离的约束条件(3.10)可写成如下规范的矩阵形式:

$$Fa = C, \tag{3.11}$$

(3.6)与(3.12)构成了一个约束值问题,其解可用拉格朗日乘子法求出.设 λ 为与 C 相同维数的拉格朗日乘子向量,G 为拉格朗日函数,即

$$G = \mathrm{ESS} + \lambda^\tau(F\hat{a} - C),$$

则有

$$\begin{aligned}\partial G/\partial\hat{a} = &-2\sum_{i=1}^{n}(X_{ia}^\tau(0,N-1)y_i(1,N) - \\ &X_{ia}^\tau(0,N-1)X(0,N-1))\hat{a} + F^\tau\lambda,\end{aligned} \tag{3.13a}$$

$$\partial G/\partial\lambda = F\hat{a} - C.$$

假定矩阵

$$\sum_{i=1}^{n}X_{ia}^\tau(0,N-1)X_{ia}(0,N-1)$$

可逆,令

$$P = (\sum_{i=1}^{n}X_{ia}^\tau(0,N-1)X_{ia}(0,N-1))^{-1}, \tag{3.14a}$$

$$\hat{e} = P(\sum_{i=1}^{n}X_{ia}^\tau(0,N-1)y_i(1,N)), \tag{3.14b}$$

则从

$$\partial G/\partial\hat{a} = 0 \quad 和 \quad \partial G/\partial\lambda = 0, \tag{3.15}$$

可得

$$\hat{a} = \hat{e} - (PF^\tau\lambda)/2, \tag{3.16a}$$

$$F\hat{a} = C. \tag{3.16b}$$

把(3.16a)代入(3.16b)整理后得

$$C = F\hat{e} - (FPF^{\tau}\lambda)/2. \tag{3.17}$$

由于(2.1b)中的 s 个约束独立(否则可以消去多余的或非独立的约束),所以可以合理地假定 F 满行秩,这意味着 FpF^{τ} 可逆,于是从(3.17)式可得

$$-\lambda/2 = (FPF^{\tau})^{-1}(C - F\hat{e}), \tag{3.18}$$

再把这一结果代回(3.16)式,我们得到

$$\hat{a} = \hat{e} + PF^{\tau}(FPF^{\tau})^{-1}(C - F\hat{e}). \tag{3.19}$$

由于拉格朗日函数 G 是关于 $\hat{a}$ 的一个二次型,具有唯一的极值点,而且已假定 $P > 0$,故知由(3.19)式给出的 $\hat{a}$,就是 MIMO 系统(1.1a)在不可分离线性等式约束条件(2.1b)下的最小二乘估计.为了简化计算,下面把 P 和 $\hat{e}$ 写成更为简单的形式.对于 P,由于

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ia}^{\tau}(0, N-1)X_{ia}(0, N-1) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{\tau}X_i^{\tau}(0, N-1)X_i(0, N-1)A_i =$$
$$\text{block diag}(X_i^{\tau}(0, N-1)X_i^{\tau}(0, N-1)), \tag{3.20}$$

所以有

$$P = \text{block diag}(X_i^{\tau}(0, N-1)X^{\tau}(0, N-1))^{-1}. \tag{3.21}$$

对于 $\hat{e}$,由于

$$X_{ia}^{\tau}(0, N-1)y_i(1, N) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} A_i^{\tau}X_i^{\tau}(0, N-1)y_i(1, N) =$$
$$\begin{bmatrix} X_1^{\tau}(0, N-1)y_1(1, N) \\ X_2^{\tau}(0, N-1)y_2(1, N) \\ \vdots \\ X_n^{\tau}(0, N-1)y_n(1, N) \end{bmatrix}, \tag{3.22}$$

故有

$$\hat{e} = P\sum_{i=1}^{n}(X_{ia}^{\tau}(0, N-1)y_i(1, N)) \cdot$$
$$\begin{bmatrix} (X_1^{\tau}(0, N-1)X_1(0, N-1))^{-1}X_1^{\tau}(0, N-1)y_1(1, N) \\ (X_2^{\tau}(0, N-1)X_2(0, N-1))^{-1}X_2^{\tau}(0, N-1)y_2(1, N) \\ \vdots \\ (X_n^{\tau}(0, N-1)X_n(0, N-1))^{-1}X_n^{\tau}(0, N-1)y_n(1, N) \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

进一步,若令

$$\hat{e} = (\hat{e}_1^{\tau}\ \hat{e}_2^{\tau}\ \hat{e}_3^{\tau} \cdots \hat{e}_n^{\tau})^{\tau}. \tag{3.24a}$$

其中 $\hat{e}_i$ 与 $\hat{a}_i$ 相对应,则对 $i = 1, 2, 3, \cdots, n$,有

$$\hat{e}_i = (X_i^{\tau}(0, N-1)X_i(0, N-1))^{-1} \cdot$$
$$X_i^{\tau}(0, N-1)y_i(1, N). \tag{3.24b}$$

显然 $\hat{e}_i$ 就是无条件约束下 a_i 的最小二乘估计.考虑到这点,分析(3.19)的结构可知,不可分离线性等式约束条件下 MIMO 系统的最小二乘估计,是由无条件约束下的最小二乘估计与一个由约束引起的修正项迭加而成,这是一个重要的结论,根据这一结论,可按下述步骤来计算约束条件下 MIMO 系统的最小二乘估计:

1) 按(3.24b)式计算 MIMO 系统无条件下的最小二乘估计 $\hat{e}_i (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$,由此得到的 $\hat{e}$ 和 P.

2) 对实际约束进行规范化处理并得到 F,利用 F 和第一步得到的 $\hat{e}$ 和 P 计算修正项:

$$\Delta = PF^{\tau}(FPF^{\tau})^{-1}(C - F\hat{e}).$$

3) 利用前两步得到的结果,按下式计算约束条件下的最小二乘估计 $\hat{a}$:

$$\hat{a} = \hat{e} + \Delta.$$

4　参数估计的统计性质(Statistical properties of the estimation)

前面的讨论表明:MIMO 系统无约束条件下的参数估计是有约束条件下参数估计的一部份.利用这一点和文献[5]中的相应结果容易证明以下结论:

1° $\hat{a}$ 是 a 的无偏估计,即

$$E(\hat{a}) = a. \tag{4.1}$$

这说明,不可分离线性等式约束不改变估计的无偏性.

2° 估计误差的方差.

定义矩阵 Q 如下:

$$Q = I_n - PF^{\tau}(FPF^{\tau})^{-1}F. \tag{4.2}$$

则有

$$\mathrm{E}((\hat{a} - a)(\hat{a} - a)^{\tau}) = \mathrm{var}(\hat{a}) =$$
$$Q^{\tau}\mathrm{var}(\hat{e})Q = Q^{\tau}P(\text{block diag}(\delta_i^2 I_i))Q.$$

这说明,不可分离线性等式约束改变了估计误差的方差.

5　结论(Conclusion)

前面讨论了系统(1.1)在不可分离线性等式约束条件下的最小二乘估计问题.主要结果是参数估计式(3.19)和估计误差方差(4.3).对于在线实时估计,(3.19)中的无约束估计部分可以进行递推计算,但修正项却不能递推计算.

参考文献(References)

1　韩志刚.多层递阶方法及其应用.北京:科学出版社,1989

(下转第 90 页)

动态部分,而不能保证静态部分(快变状态)趋近.处理正常非线性系统的方法已不能简单地引用到广义非线性系统中,需要根据非线性广义系统的结构特点,创立或提出新的研究方法.

参考文献(References)

1 Sastry S S and Desoer C A. Jump behavior of circuits and systems. IEEE Trans. Circuit & Systems, 1981, 28(2): 1109 - 1124

2 刘永清,温香彩.广义系统的变结构控制.广州:华南理工大学出版社,1997

3 McClamroch M H. Singular systems of differential equations as dynamic model for constrained robot systems. Proc. of the IEEE Conf. Rob. and Automat., San Francisco, CA, 1986, 21 - 28

4 刘晓平,张嗣瀛.非线性奇异系统的线性化.信息与控制,1993,22(4):209 - 214

5 Utkin V I. Sliding Modes in Control Optimization. Berlin, Heideberg: Springer-Verlag, 1992

6 Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations II. New York: Pitman, 1982

7 Dai L Y. Singular Control System. Berlin: Springer-Verlag, 1989

本文作者简介

温香彩 1964年生.1995年在华南理工大学自动化系获博士学位,1995年7月至1997年7月在华南理工大学电子与信息学院做博士后研究.研究兴趣为广义系统的变结构控制,分支与混沌控制,非线性系统的鲁棒控制等.

(上接第83页)

2 方开泰,金辉,陈庆立.实用回规分析.北京:科学出版社,1988

3 方开泰.一类约束的回归-配方回归.计算数学,1982,(4):57 - 69

4 许茂增.路网节点输入输出模型的参数估计.95'全国青年领域青年学术会议论文集,重庆:重庆大学出版社,1995

5 李树英,许茂增.随机系统的滤波和控制.北京:国防工业出版社,1991

本文作者简介

许茂增 1960年生.1982年8月毕业于西安公路交通大学汽车系自动控制专业,现任教于重庆交通学院管理系,副教授.主要从事交通运输和经济系统的建模,分析与控制方面的研究,发表论文60多篇,与华南理工大学李树英教授合作出版有《随机系统的滤波与控制》一书.

程昌华 1957年生.1982年8月毕业于重庆建筑大学(本科),1988年硕士学位研究生毕业于清华大学水利电力工程系,现任教于重庆交通学院水港系,副教授,硕士生导师.主要从事水运经济分析,河道变形计算及建立数学模型分析方面的研究,已发表论文30多篇.