广义非线性系统的变结构控制理论*

温香彩
(国家环境保护总局信息中心·北京,100029)

摘要: 利用几何方法,从广义非线性系统本身出发,研究了广义非线性控制系统的变结构控制理论,给出了系统存在变结构控制的充分条件及实际滑动模的近似定理.从所得结论可知,滑动条件仅能保证实际滑动模的慢变状态趋近于理想滑动模的慢变状态,而不能保证实际滑动模的快变状态趋近于理想滑动模的快变状态,研究正常非线性系统的方法已不能简单地被利用到广义非线性系统.

关键词: 广义非线性系统; 变结构控制; 相关度

Theory of Variable Structure Control for Singular Nonlinear Systems

Wen Xiangcai
(Centre of Information, National Environment Protection Administration·Beijing, 100029, P.R.China)

Abstract: The theory of variable structure control of singular nonlinear control systems was considered based on the singular nonlinear systems itself by employing the method of geography, and gives the sufficient condition of existence of variable structure control and approximation theory of real sliding mode. It is shown that sliding condition only guarantee the slow-varying state of real sliding mode approach that of ideal sliding mode but not guarantee the fast-varying state of real sliding mode approach that of ideal sliding mode. The method applied for studying normal nonlinear system can not be used directely to singular nonlinear system.

Key words: singular nonlinear systems; variable structure control; relative degree

1 引言(Introduction)

在生产实际中,存在大量的非线性广义系统.例如电路系统[1]、电力系统[2]、有监督学习的神经网络系统[2]、末端与外界环境接触的受限机器人系统[3]等.系统的一般模型为 $F(\dot{x}, x, u, t) = 0, \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}$ 奇异.对此系统,文[4]利用拓扑几何方法研究了此类系统的线性化问题;文[2]利用模型参考法,借助于线性定常广义系统的变结构控制理论设计了非线性广义系统的变结构控制.本文利用几何方法,从广义非线性控制系统本身出发,首次研究了广义非线性控制系统的变结构控制理论,给出了系统存在变结构控制的充分条件及滑动模近似定理.

2 主要结果(Main results)

考虑如下系统

$$E\dot{x} = f(x, u). \tag{1}$$

这里 $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量,$u \in U \subset \mathbb{R}^m$ 为系统的控制向量,U 为容许控制集(即使系统的解存在的控制集合),$f(x, u)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑向量场,$E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是秩为 r 的奇异矩阵,即 $\operatorname{rank}E = r < n$.

给定容许初值 $x^0 \in \mathbb{R}^n$,只研究系统在 x^0 的某容许开邻域 $N \subset \mathbb{R}^n$ 上的变结构控制问题.容许初值为使系统的解存在且唯一的初值,本文假设任何容许初值都有容许开邻域.

设计如下形式的切换函数

$$S = C(y) + z, \quad \dot{z} = H(x), \quad y = Ex, \tag{2}$$
$$C(y) = (C_1(y)\ C_2(y)\ \cdots\ C_m(y))^{\mathrm{T}},$$
$$H^{\mathrm{T}}(x) = (H_1(x)\ H_2(x)\ \cdots\ H_m(x)),$$
$$C_i(y), H_i(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n), \quad i = 1,2,\cdots,m.$$

系统(1)的变结构控制问题就是寻求如下的控制策略 $u = \begin{cases} u^+(x), & S > 0 \\ u^-(x), & S < 0 \end{cases}$,使得系统在有限时间内到达并维持在水平集 $Q = \{x \in \mathbb{R}^n, S(x) = 0\}$ 上.这里 $S(x) > 0 (< 0)$ 表示

$$S_i(x) > 0(< 0), i = 1,2,\cdots,m;$$
$$u^{\pm}(x) = (u_1^{\pm}(x)\ u_2^{\pm}(x)\ \cdots\ u_m^{\pm}(x))^{\mathrm{T}}.$$

系统在 $S(x) = 0$ 上的运动称为滑动模态.存在滑动模态的条件是

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{S_i \to 0^+} \dot{S}_i(x) < 0, \\ &\lim_{S_i \to 0^-} \dot{S}_i(x) > 0, \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,m. \tag{3}$$

* 中国博士后基金资助项目.
本文于1996年3月27日收到.1997年10月20日收到修改稿.

仿照正常系统,定义 $S_i(x)$ 的相关度:

定义 1 对 $S_i(x)$,若对任意的 $u \in U$, $L_{\partial f/\partial u_j} L_f^k C_i(y) = 0, \forall x \in N, j = 1,2,\cdots,m; k = 0,1,\cdots,r_i-2$; $L_{\partial f/\partial u_j} L_f^{r_i-1} C_i(y) \neq 0, \forall x \in N$,存在 $j \in \{1,2,\cdots,m\}$,则称 r_i 为 $S_i(x)$ 在 x^0 处的相关度.这里 $L_f C_i(y)$ 表示标量函数 $C_i(y)$ 沿着向量场 f 的 Lie 导数, $L_f C_i(y) = \dfrac{\partial C_i}{\partial y} f, L_f^k C_i = L_f(L_f^{k-1} C_i)$.

定理 1 系统(1)(2)存在局部滑动模态的必要条件为 $r_i = 1, i = 1,2,\cdots,m$.这里 r_i 为 $S_i(x)$ 的相关度.

证 (反证法)若不然,对某个 $j = 1,2,\cdots,m, r_j > 1$,则

$$\frac{\partial \dot S_j}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial C_j}{\partial y} f(x,u) + H_i(x)\right) = \frac{\partial C_j}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u_i} = L_{\partial f/\partial u_i} C_j = 0,$$

$$\forall x \in N,\ i = 1,2,\cdots,m.$$

因而当控制 u 从 $u^+(x)$ 转换到 $u^-(x)$(或相反)时, $\dot S_j$ 的符号不变,因而滑动运动不会产生. 证毕.

定理 2 令

$$\varepsilon_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\inf_{u\in U} L_f C_i(x^0,u) + H_i(x^0))\},$$

$$\varepsilon_2 = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\{\sup_{u\in U}(L_f C_i(x^0,u) + H_i(x^0))\},$$

系统(1)(2)存在局部滑动模态的充分条件是矩阵

$$\rho(x,u) = \begin{bmatrix} L_{\partial f/\partial u_1} C_1 & \cdots & L_{\partial f/\partial u_m} C_1 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ L_{\partial f/\partial u_1} C_m & \cdots & L_{\partial f/\partial u_m} C_m \end{bmatrix}$$

在 $N' \times U$ 中非奇异,且 $\varepsilon_1 < 0, \varepsilon_2 > 0$.

证 根据定理条件,由隐函数定理及方程

$$\begin{pmatrix} \dot S_1 \\ \vdots \\ \dot S_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (L_f C_1)(x,u) + H_1 \\ \vdots \\ (L_f C_m)(x,u) + H_m \end{pmatrix} = \hat\varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

知,(4)总有解 $u = \bar u(x,\dot S) = u(x,\hat\varepsilon)$,其中实数 $\hat\varepsilon$ 满足 $|\hat\varepsilon| < \min\{-\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. 证毕.

若取等速趋近律 $\dot S = -\varepsilon \operatorname{sgn} S$,则必有 $u = \begin{cases} u(x,-\varepsilon), & S > 0 \\ u(x,+\varepsilon), & S < 0 \end{cases}$ 使得 $\dot S_i = \begin{cases} -\varepsilon, & S_i > 0 \\ \varepsilon, & S_i < 0 \end{cases}$.因此,系统的状态 Ex 可在有限时间内到达滑动流形 $S(x) = 0$,并维持在其上运动.在(4)中令 $\hat\varepsilon = 0$,得到等效控制 $u_{eq} = u^0(x) = u(x,0)$.代入(1)得到滑动模态的动力学方程

$$E\dot x = f(x, u^0(x)),\quad C(y) + z = 0,$$

$$y = Ex,\quad \dot z = H(x).$$

下面考虑(1)的一种特殊情况:仿射非线性广义系统

$$E\dot x = f(x) + B(x)u. \tag{5}$$

定理 3 系统(5)存在局部滑动模态的充分条件是:矩阵

$$\rho(x,u) = \begin{bmatrix} L_{B_1(x)} C_1 & \cdots & L_{B_m(x)} C_1 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ L_{B_1(x)} C_m & \cdots & L_{B_m(x)} C_m \end{bmatrix}$$

在 $N \times U$ 中非奇异,且 $\bar\varepsilon_1 < 0, \bar\varepsilon_2 > 0$.这里

$$\bar\varepsilon_1 = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\inf_{u\in U}(\dot C_i(f(x^0) + B(x^0)u) + H_i(x^0))\},$$

$$\bar\varepsilon_2 = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\{\sup_{u\in U}(\dot C_i(f(x^0) + B(x^0)u) + H_i(x^0))\}.$$

由定理2即得定理3的结论.在(5)中,若 $f(x) = Ax, B(x) = B$(定常矩阵),则(5)退化为

$$E\dot x = Ax + Bu. \tag{6}$$

推论 系统(6)存在局部滑动模态的充分条件为矩阵

$$\begin{bmatrix} C_1B_1 & C_1B_2 & \cdots & C_1B_m \\ C_2B_1 & C_2B_2 & \cdots & C_2B_m \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ C_mB_1 & C_mB_2 & \cdots & C_mB_m \end{bmatrix} = CB$$

在 $N \times U$ 中非奇异.

众所周知,对非广义非线性系统(即 $\operatorname{rank} E = n$ 时的正常非线性系统),有实际滑动模近似定理[5],对广义非线性系统,此定理的形式有所变化,滑动条件不再能保证实际滑动模的全部状态趋近于理想滑动模的全部状态.以系统(6)为例,假设实际滑动模的状态为 $\bar x$,则实际滑动模状态方程为

$$\begin{cases} E\dot{\bar x} = [A - B(CB)^{-1}(CA + H)]\bar x - B(CB)^{-1}\dot S(\bar x), \\ CE\bar x + z = 0,\ \dot z = H\bar x. \end{cases} \tag{7}$$

理想滑动模方程为

$$E\dot x = [A - B(CB)^{-1}(CA + H)]x,$$

$$C(y) + z = 0, \dot z = Hx, y = Ex,$$

令 $e = x - \bar x$,则 e 的动力学方程为

$$E\dot e = [A - B(CB)^{-1}(CA + H)]e + B(CB)^{-1}\dot S(\bar x). \tag{8}$$

如果 (E,A,B) R- 能控且脉冲能控,则由[7]知,存在矩阵 K 使

$$\begin{aligned}&\operatorname{degdet}(\lambda E - A + BK) = \operatorname{rank} E,\\ &\sigma(E, A - BK) \subset \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -\alpha, \alpha > 0\}.\end{aligned} \tag{9}$$

这里 degdet(·)表示行列式(·)的度，$\sigma(E,A-BK)$ 表示 $(E,A-BK)$ 的有限特征根集合.选取(7)中的 C,H 满足 $CA+H=CBK$,则在切换面 $S=0$ 上，滑动模稳定.

定理 4(广义线性系统实际滑动模近似定理) 对系统(6)，若 i) (E,A,B) R- 能控且脉冲能控；ii) 切换函数为 $S=CEx+z, \dot{z}=Hx$,且 C,H 满足 $CA+H=CBK$, K 满足(9)；iii) $\|x(t_0)-\bar{x}(t_0)\| \leqslant \Delta$, $\|S(t_0)\| \leqslant \Delta$.则存在 $T>0, b>0$,当 $t_0 \leqslant t < T$ 时 $\|Ex(t)-E\bar{x}(t)\| \leqslant b\Delta$.

证　由定理 4 的条件 ii) 知，存在 $\mu > 0$ 使 $\det(\mu E - A + B(CB)^{-1}(CA+H)) \neq 0$. 令

$$\hat{E} = (\mu E - A + B(CB)^{-1}(CA+H))^{-1}E,$$
$$\hat{B} = (\mu E - A + B(CB)^{-1}(CA+H))^{-1}B,$$
$$\hat{A} = (\mu E - A + B(CB)^{-1}(CA+H))^{-1}\cdot (A - B(CB)^{-1}(CA+H)).$$

则由 $\operatorname{degdet}(\lambda E - A + B(CB)^{-1}(CA+H)) = \operatorname{rank} E$ 及[6]知(8)的解为

$$e(t) = \exp[\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)]e(t_0) + \hat{E}^D\int_{t_0}^{t}\exp[\hat{E}^D\hat{A}(t-\tau)]\hat{B}\dot{S}\mathrm{d}\tau + (I-\hat{E}\hat{E}^D)\hat{A}^D\hat{B}\dot{S}(t).$$

且 $\hat{E}\hat{E}^D = \hat{E}^D\hat{E}, \hat{E}^2\hat{E}^D = \hat{E}^D\hat{E}^2 = \hat{E}$, 故

$$Ee(t) = E\exp[\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)]e(t_0) + E\hat{E}^D\int_{t_0}^{t}\exp[\hat{E}^D\hat{A}(t-\tau)]\hat{B}\dot{S}\mathrm{d}\tau,$$

$$\begin{aligned}&\|Ex(t)-E\bar{x}(t)\| \leqslant \\ &\|E\|\exp(-\alpha t)[\|\hat{B}\|\exp(\alpha t)\|e(t_0)\| + \\ &2\|\hat{B}\|\|E\hat{E}^D\|\|(S(t_0)\| + \\ &\|E\hat{E}^D\|\left\|\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\exp(-\hat{E}^D\hat{A}\tau)\hat{B}S(\tau)\mathrm{d}\tau]\right\|.\end{aligned}$$

因为 $\|S(t_0)\| \leqslant \Delta$,由 $S(t)$ 的连续性知,存在 $T > t_0$ 使得当 $t \in [t_0, T)$ 时, $\|S(t)\| \leqslant \Delta$,又 $\alpha > 0$, $\|e(t_0)\| = \|x(t_0)-\bar{x}(t_0)\| \leqslant \Delta$,故当 $t \in [t_0,T)$ 时, $\|Ee(t)\| \leqslant \|E\|\Delta + 4\|E\hat{E}^D\|\|\hat{B}\|\Delta = b\Delta$. 这里 $b = \|E\| + 4\|E\hat{E}^D\|\|\hat{B}\|$.　证毕.

对仿射广义非线性系统(5),若实际滑动模状态为 $\bar{x}$，则其动力学方程为

$$E\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}) - B(\bar{x})\rho^{-1}(\bar{x},u)(L_{f(\bar{x})}C(\bar{y}) + H(\bar{x}) - \dot{S}(\bar{x})).$$

仿照定理 4 的证明,可得系统(5)的实际滑动模近似定理：

定理 5　对仿射广义非线性系统(5),如果 iv) 在区间 $[t_0,T_1)$ 上,(5)有解位于 $S(x)=0$ 的 Δ 邻域内,即 $\|S(x)\| \leqslant \Delta$; v) $f(x)-B(x)\rho^{-1}(x,u)(L_{f(x)}C(y)+H(x))$ 在 $N \times U$ 满足 Lipshitz 条件,其 Lipshith 常数为 L;vi) 函数 $B(x)\rho^{-1}(x,u)$ 关于所有变量的偏导数皆存在,且在任一有界域内有界; vii) $\bar{x}(t_0) \in N$, $\|x(t_0)-\bar{x}(t_0)\| \leqslant \Delta$,则存在 $T>0$, $\bar{b}>0$, 当 $t_0 \leqslant t < T$ 时 $\|Ex(t) - E\bar{x}(t)\| \leqslant \bar{b}\Delta$.

例 1　考虑一个简单的二阶非线性广义系统

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix}x_2\\ -x_2+x_2^3\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}u. \tag{10}$$

选取切换函数为 $S = C(y)+z, \dot{z}=x_1, C(y) = (1\ \ 1)y, y = Ex = x_1$.易验证定理 3 的条件成立.由 $\dot{S}=0$ 得等效控制为 $u_{eq} = -x_1 - x_2^3$,变结构控制可设计为 $u = -x_1 - x_2^3 - \varepsilon\operatorname{sgn}S, \varepsilon > 0$.

例 2　考虑一个简单的二阶线性广义系统

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}u. \tag{11}$$

容易验证,定理 4 的条件 i)成立,选取切换函数为 $S = x_1 + z, \dot{z} = x_1$.则等效控制为 $u_{eq} = -3x_1$.而实际中由于一些随机因素干扰.状态是在切换面 $S=0$ 的一个小邻域 Δ 内变化,实际控制为 $\bar{u} = -3x_1 - \dot{S}$.实际的滑动模方程为 $\dot{\bar{x}}_1 = -\bar{x}_1 - \dot{S}, 0 = \bar{x}_2 - 3\bar{x}_1 - \dot{S}$.理想的滑动模方程为 $\dot{x}_1 = -x_1, 0 = x_2 - 3x_1$.显然 $\bar{x}_1 \to x_1(t\to\infty)$,而 $\bar{x}_2 - x_2 = -3(\bar{x}_1 - x_1) - \dot{S}$,由于无法估计 $\dot{S}$ 的变化,故 $\bar{x}_2 - x_2$ 的变化也就无法知道,即由 x_2 不能推知 $\bar{x}_2$ 的变化情况,也就是说,等效控制法对快变子系统不成立,实际滑动模近似定理仅对慢变子系统有效.

总之,对广义系统而言,实际滑动模近似的等速趋近法已不能简单地被利用.设计正常系统变结构控制的方法需要改进.我们将另文讨论广义非线性不确定系统的变结构控制设计问题.

3　结束语(Conclusion)

本文从几何观点出发,研究了广义非线性控制系统的变结构控制理论,给出了系统存在变结构控制的充分条件及实际滑动模近似定理.从所得结论可看出:正常系统与广义系统之间存在许多不同之处.就滑动模近似定理而言,滑动条件仅能保证实际滑动模的动态部分(慢变状态)趋近于理想滑动模的

动态部分,而不能保证静态部分(快变状态)趋近.处理正常非线性系统的方法已不能简单地引用到广义非线性系统中,需要根据非线性广义系统的结构特点,创立或提出新的研究方法.

参考文献(References)

1 Sastry S S and Desoer C A. Jump behavior of circuits and systems. IEEE Trans. Circuit & Systems, 1981, 28(2): 1109 - 1124

2 刘永清,温香彩.广义系统的变结构控制.广州:华南理工大学出版社,1997

3 McClamroch M H. Singular systems of differential equations as dynamic model for constrained robot systems. Proc. of the IEEE Conf. Rob. and Automat., San Francisco, CA, 1986, 21 - 28

4 刘晓平,张嗣瀛.非线性奇异系统的线性化.信息与控制,1993,22(4):209 - 214

5 Utkin V I. Sliding Modes in Control Optimization. Berlin, Heideberg: Springer-Verlag, 1992

6 Campbell S L. Singular Systems of Differential Equations II. New York: Pitman, 1982

7 Dai L Y. Singular Control System. Berlin: Springer-Verlag, 1989

本文作者简介

温香彩 1964年生.1995年在华南理工大学自动化系获博士学位,1995年7月至1997年7月在华南理工大学电子与信息学院做博士后研究.研究兴趣为广义系统的变结构控制,分支与混沌控制,非线性系统的鲁棒控制等.

(上接第83页)

2 方开泰,金辉,陈庆立.实用回规分析.北京:科学出版社,1988

3 方开泰.一类约束的回归-配方回归.计算数学,1982,(4):57 - 69

4 许茂增.路网节点输入输出模型的参数估计.95'全国青年领域青年学术会议论文集,重庆:重庆大学出版社,1995

5 李树英,许茂增.随机系统的滤波和控制.北京:国防工业出版社,1991

本文作者简介

许茂增 1960年生.1982年8月毕业于西安公路交通大学汽车系自动控制专业,现任教于重庆交通学院管理系,副教授.主要从事交通运输和经济系统的建模,分析与控制方面的研究,发表论文60多篇,与华南理工大学李树英教授合作出版有《随机系统的滤波与控制》一书.

程昌华 1957年生.1982年8月毕业于重庆建筑大学(本科),1988年硕士学位研究生毕业于清华大学水利电力工程系,现任教于重庆交通学院水港系,副教授,硕士生导师.主要从事水运经济分析,河道变形计算及建立数学模型分析方面的研究,已发表论文30多篇.