

一类稳定最小相位对象同时镇定 H_∞ 性能设计*

王德进

(黑龙江大学自动化系·哈尔滨, 150080)

摘要: 基于奈氏(Nyquist)稳定性判据和同时镇定控制器参数化结果,对一类 SISO 稳定最小相位被控对象同时镇定 ∞ -范数性能设计问题进行了讨论.文中提出了同时镇定问题的性能指标,引进了奈氏曲线意义下模型的嵌套结构的概念,给出了上述一类对象同时镇定性能设计的设计方法和步骤.具体算例说明该方法实用有效.

关键词: 同时镇定; 控制器参数化; 性能设计; 奈氏判据

H_∞ -Norm Simultaneous Stabilization Performance Design for a Family of Stable Minimum Phase Plants

Wang Dejin

(Department of Automation, Heilongjiang University·Harbin, 150080, P. R. China)

Abstract: Based on the Nyquist stability criterion and the parametrization of simultaneously stabilizing controller, the ∞ -norm simultaneous stabilization performance design problem of a family of SISO stable minimum phase plants is discussed. The performance objective function of simultaneous stabilization problem is proposed. The concept of nested model structures in the sense of Nyquist curve is introduced. The design method and steps of simultaneous stabilization performance of above mentioned plants is given. The actual applicability and effectiveness of the design method is illustrated by examples.

Key words: simultaneous stabilization; controller parametrization; performance design; Nyquist stability criterion

1 引言(Introduction)

给定 $m(m \geq 2)$ 个被控对象 P_1, P_2, \dots, P_m , 设计一控制器 C , 使 m 个对象被同时镇定的问题是由 Saeks 和 Murray 于 1982 年首先提出的^[1]. Vidyasagar 等在这方面进行了研究, 并取得了一些结果^[2~7]. 这些结果有的是纯理论上的, 难于用来进行同时镇定控制器的设计. 有些虽然能用来进行设计, 但也仅仅是局限于同时镇定的控制器设计, 而没有对同时镇定的系统性能作出分析或给出设计. 1995 年, 曹永岩等基于稳定互质分解和分散控制理论, 得到了同时镇定控制器参数化结果及相应的约束条件^[6]. 为同时镇定的性能设计提供了条件. 本文利用上述结果, 对一类 SISO 稳定最小相位被控对象同时镇定 ∞ -范数性能指标设计问题进行讨论. 同时镇定的工程背景是明显的. 考虑对非线性系统的跟踪问题. 在不同工作点处对其作小范围线性化, 得到不同的传递函数. 此时的控制器设计就要保证在不同工作点处闭环系统的内稳定性. 本文讨论的同时镇定性能设计问题可以这样提出: 给定 P_1, P_2, \dots, P_m 设计 C ,

使得闭环系统达到 1) C 同时镇定 P_1, P_2, \dots, P_m ; 2) 对 P_1, P_2, \dots, P_m, C 使系统均具有一定的性能(如一定的跟踪误差). 以上讨论说明, 作同时镇定性能设计是具有实际意义和必要的.

2 性能设计(Performance design)

引理^[6] m 个 SISO 稳定对象 P_1, P_2, \dots, P_m 的同时镇定控制器 C_1 的集合为:

$$\{C_1(Q_1) = \frac{Q_1}{1 - P_1 Q_1} \mid 1 - P_1 Q_1 \neq 0, Q_1 \in H, \\ \text{且 } \exists Q_i \in H, 1 - P_i Q_i \neq 0, \text{ s.t.} \\ C_1(Q_1) = C_i(Q_i) (i = 2, 3, \dots, m)\} \quad (1)$$

其中设 P_1 为主对象, C_1 为主控制器. H 是由稳定、正则和实有理函数全体构成的环.

图 1 为典型 SISO 单位反馈系统. 取敏感传递函数: $S = \frac{1}{1 + PC} = \frac{1}{1 + L}$. 其中 $L = PC$ 为开环传递函数. 定义 ∞ -范数性能指标 $\|WS\|_\infty < 1$. 其中 W 为权函数, $\|\cdot\|_\infty$ 为系统的 ∞ -范数. 图 1 所示系统性能设计是指找到一正则的 C , 使反馈系统达内稳

* 黑龙江省自然科学基金(F9717)资助课题.
本文于 1997 年 1 月 22 日收到, 1997 年 12 月 31 日收到修改稿.

定且满足 $\|WS\|_\infty < 1$. 其设计方法是利用内稳定控制器参数化结果^[8].

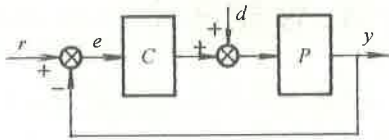


图1 单位反馈系统
Fig. 1 Unity feedback system

对同时镇定问题,我们可定义如下性能指标.

定义 1 m 个 SISO 对象 P_1, P_2, \dots, P_m 同时镇定 ∞ -范数性能指标为:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \{ \|WS_{i1}\|_\infty \} < 1. \quad (2)$$

其中敏感函数 $S_{i1} = \frac{1}{1 + P_i C_1(Q_1)} = \frac{1}{1 + L_{i1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m$).

对性能指标 $\|WS\|_\infty < 1$ 可作如下几何解释. 注意到

$$\begin{aligned} \|WS\|_\infty < 1 \\ \Leftrightarrow \left| \frac{W(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| < 1, \forall \omega \\ \Leftrightarrow |W(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega. \end{aligned} \quad (3)$$

最后一个不等式指的是在每一频率 ω 下,奈氏曲线 $L(j\omega)$ 上的点都位于以 $(-1, j0)$ 为圆心,以 $|W(j\omega)|$ 为半径的圆外(图 2). 如果假设权函数不依赖于频率 ω ,即 $W(j\omega) = W = \text{const}$,则

$$\begin{aligned} \|WS\|_\infty < 1 \Leftrightarrow |W| < |1 + L(j\omega)|, \forall \omega \\ \Leftrightarrow |W| < \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)|. \end{aligned} \quad (4)$$

而 $\inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| =$ 从 -1 点到奈氏曲线上的最近点的距离. 众所周知,如果 L 是稳定和最小相位的,且 $L(0) > 0$,则奈氏曲线 $L(j\omega)$ 起始于正实轴,且如果 L 是严格正则的,奈氏曲线 $L(j\omega)$ 最终将按顺时针方向趋于原点. 根据奈氏判据,如果 L 的幅角在穿越频率处大于 -180° (或说,奈氏曲线 $L(j\omega)$ 不绕过 $(-1, j0)$ 点),则可保证内稳定性. 也就是说,如果某对象 P 对应的开环传函 L 是稳定和最小相位的,应用内稳定控制器参数化结果作性能设计,等价于选择正则的 C ,使奈氏曲线 $L(j\omega)$ 不绕过 $(-1, j0)$ 点,且使(4)式的最后一个不等式成立.

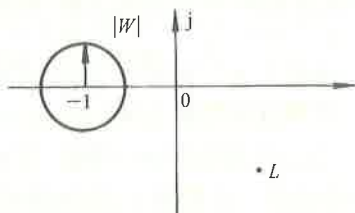


图2 图示性能指标
Fig. 2 Illustrated performance

同样可对同时镇定性能指标(2)式作出几何解

释,并且有

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} \{ \|WS_{i1}\|_\infty \} < 1 \\ \Leftrightarrow |W| < \min_{1 \leq i \leq m} \inf_{\omega} |1 + L_{i1}(j\omega)|. \end{aligned} \quad (5)$$

如果 m 个对象 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 对应的开环传函 $L_{i1} = P_i C_1 (i = 1, 2, \dots, m)$ 是稳定和最小相位的,且 $L_{i1}(0) > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$,为保证 C_1 能同时镇定 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$,奈氏曲线 $L_{i1}(j\omega) (i = 1, 2, \dots, m)$ 均应不绕过 $(-1, j0)$ 点. 也就是说,应用同时镇定控制器参数化结果作同时镇定性能设计,等价于选择正则的控制器 C_1 使奈氏曲线 $L_{i1}(j\omega) (i = 1, 2, \dots, m)$ 均不绕过 $(-1, j0)$ 点,且使(5)式的最后一个不等式成立. 这样,我们就可取其开环传函 $L_{i1} (i = 1, 2, \dots, m)$ 距 $(-1, j0)$ 点有最近距离的对象作为主对象,进行性能设计,而其余对象自然满足性能指标. 这里关键问题是如何从 m 个对象 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 中确定其开环传函 $L_{i1}(j\omega) (i = 1, 2, \dots, m)$ 距 $(-1, j0)$ 点有最近距离的对象(主对象). 为此我们作如下假设.

假设 1 m 个对象 P_1, P_2, \dots, P_m 均是稳定和最小相位的,且 $P_i(0) > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$.

假设 2 按主对象作同时镇定控制器参数化而得到的主控制器 C_1 无 $\text{Res} \geq 0$ 平面内的极、零点,且至多有一个原点处的极点.

以上两点假设可保证开环传函 $L_{i1} (i = 1, 2, \dots, m)$ 起始于正实轴(若 C_1 有一原点处的极点,则 L_{i1} 起始于负虚轴),且不围绕 $(-1, j0)$ 点,相应的闭环是稳定的(同时镇定).

以上讨论是在假设权函数 $W(j\omega)$ 不依赖于频率 ω 的条件下进行的. 一般情况下,常取 $|W(j\omega)|$ 为 ω 的减函数^[8],即具有低通滤波器的性质. 在某一频段内,可将其视为常数.

能否由对象奈氏曲线间相互关系,确定开环传函间相互关系呢? 对某一类对象我们说是可以的. 先引入下面的定义.

定义 2 两稳定最小相位对象 P_1, P_2 的奈氏曲线间如有关系: 在任一频率 ω 下,有 $\varphi_2(\omega) \leq \varphi_1(\omega)$ (如图 3),且当等号成立时,有 $|P_1| < |P_2|$,则称 P_1, P_2 间具有奈氏曲线意义下的“嵌套”结构,称 P_1 可“嵌入” P_2 中.

根据定义 2,若 P_1 可嵌入 P_2 中,则 P_1, P_2 的奈氏曲线间有关系: $\inf_{\omega} |1 + P_2| < \inf_{\omega} |1 + P_1|$. 即 P_2 距 $(-1, j0)$ 点有更近的最短距离.

利用定义 2 给出的概念,我们有如下定理.

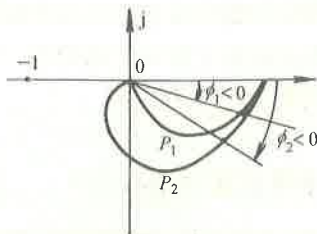


图3 奈氏曲线下嵌套结构

Fig. 3 Nested structure in the sense of Nyquist curve

定理 同时增加具有奈氏曲线意义下嵌套结构的两稳定最小相位对象 P_1, P_2 的零点或极点, P_1, P_2 间嵌套关系保持不变.

证 以增加零点为例. 设 P_1 可嵌入 P_2 中, 即在任一频率 ω 下, 有 $\varphi_2(\omega) \leq \varphi_1(\omega)$, 且当等号成立时, 有 $|P_1| < |P_2|$. P_1, P_2 同时增加零点 $-z$ 后变为 $P_1(s+z)$ 和 $P_2(s+z)$, 相应的相角记为 $\varphi_{z1}(\omega)$ 和 $\varphi_{z2}(\omega)$, 模记为 $|P_{z1}|$ 和 $|P_{z2}|$. 则 $\varphi_{z1}(\omega) = \varphi_1(\omega) + \text{tg}^{-1}\omega/z, \varphi_{z2}(\omega) = \varphi_2(\omega) + \text{tg}^{-1}\omega/z, |P_{z1}| = |P_1|\sqrt{\omega^2+z^2}, |P_{z2}| = |P_2|\sqrt{\omega^2+z^2}$. 由前面假设 P_1 可嵌入 P_2 中, 即可得在任一频率 ω 下, 有 $\varphi_{z2}(\omega) \leq \varphi_{z1}(\omega)$, 且当等号成立时, 有 $|P_{z1}| < |P_{z2}|$. 也即 $P_{z1} = P_1(s+z)$ 可嵌入 $P_{z2} = P_2(s+z)$ 中.

同理可证同时增加极点的情况. 证毕.

推论 对具有奈氏曲线意义下嵌套结构的两稳定最小相位对象 P_1, P_2 , 同时串联满足假设 2 的控制器 C_1 , 则 P_1, P_2 间嵌套关系不变.

事实上, P 和 C_1 串联, 无非是增加 P 的零点和极点, 由定理, 推论得证.

根据推论, 对于一类具有奈氏曲线意义下嵌套结构的稳定最小相位对象 P_1, P_2, \dots, P_m , 其同时镇定性能设计问题归结为在 P_1, P_2, \dots, P_m 中确定 $P_k = \min_{1 \leq i \leq m} \inf_{\omega} |1 + P_i(\omega)|$ (不妨令 $k=1$), 然后以 P_1 为主对象, 作控制器参数化, 再作 ∞ -范数性能 $\|WS_{11}\|_\infty < 1$ 设计. 此时, 自然有 $\|WS_{i1}\|_\infty < 1 (i=2, 3, \dots, m)$. 即定义 1 中同时镇定性能指标 (2) 式成立.

把以上讨论归纳为如下设计步骤: 输入 P_1, P_2, \dots, P_m, W .

Step 1 确定 P_1, P_2, \dots, P_m 间奈氏曲线意义下的嵌套关系, 找到

$P_1 = \min_{1 \leq i \leq m} \inf_{\omega} |1 + P_i(\omega)|$, 即 P_1 距 $(-1, j0)$ 点具有最近的距离.

Step 2 以 P_1 为主对象, 作控制器参数化.

Step 3^[8] 令 k 等于 P_1 的相对阶次. 选择 τ 足够

小使得 $\|W(1-J)\|_\infty < 1$. 其中 $J(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^k}$.

Step 4 设 $Q_1 = P_1^{-1}J$. 设 $C_1 = \frac{Q_1}{1 - P_1 Q_1}$. 验证 C_1 是否满足假设 2. 若否, 设计失败.

Step 5 验证同时镇定约束条件 $C_1(Q_i) = C_i(Q_i) (i=2, 3, \dots, m)$ 是否满足. 若否, 设计失败.

3 算例 (Examples)

例 1 取两稳定最小相位传函 $P_1 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, P_2 = \frac{1}{s+2}$, 权函数 $W = \frac{100}{s+1}$.

Step 1 $\varphi_2(\omega) = -\text{tg}^{-1}\omega/2, \varphi_1(\omega) = -\text{tg}^{-1}\omega/2 - \text{tg}^{-1}\omega$, 显然有 $\varphi_1(\omega) < \varphi_2(\omega), \forall \omega$. 即 P_2 可嵌入 P_1 中. P_1, P_2 的奈氏曲线如图 4 中虚线.

Step 2 取 P_1 为主对象, 作控制器参数化.

Step 3 设 $k=2$. 选 τ 使得 $W(1-J) = \frac{100}{s+1} [1 - \frac{1}{(\tau s + 1)^2}]$ 的 ∞ -范数 < 1 . 逐渐减小 τ 求得的范数如下.

表 1 ∞ -范数

(Table 1 ∞ -norm)

τ	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$\ \cdot\ _\infty$	16.6	1.66	0.166

因此取 $\tau = 10^{-3}$.

Step 4 设 $Q_1 = P_1^{-1}J = \frac{(s+1)(s+2)}{(10^{-3}s+1)^2}$. 设 $C_1 = \frac{Q_1}{1 - P_1 Q_1} = \frac{10^3(s+1)(s+2)}{s(10^{-3}s+2)}$, 且 C_1 满足假设 2.

Step 5 验证同时镇定约束条件: $C_1(Q_2) = C_2(Q_2)$, 即 $Q_1 - Q_2 - P_2 Q_1 Q_2 + P_1 Q_1 Q_2 = 0$, 解得 $Q_2 = \frac{(s+1)(s+2)}{10^{-6}s^2 + 1.002s + 1} \in H$. 可验证, $\|WS_{21}\|_\infty = 0.1 < \|WS_{11}\|_\infty = 0.166 < 1$, 且此时 $L_{11} = P_1 C_1$ 和 $L_{21} = P_2 C_1$ 大致图形如图 4 中实线所示. 可见 L_{11} 比 L_{21} 距 $(-1, j0)$ 点有更近的距离.

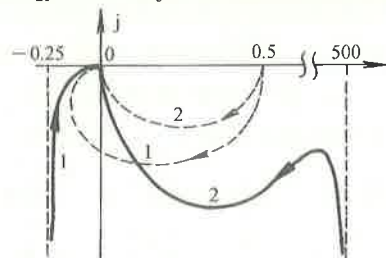


图 4 例 1 奈氏曲线

Fig. 4 Nyquist curve of example 1

例 2 取

$$P_1 = \frac{1}{s+1}, P_2 = \frac{s+2}{s+1}, W = \frac{100}{s+1},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \omega, \varphi_2 = -\operatorname{tg}^{-1} \omega / 2 - \operatorname{tg}^{-1} \omega,$$

$$\varphi_1 < \varphi_2, \forall \omega.$$

故 P_2 可嵌入 P_1 中. 取 P_1 为主对象. 仿上例可算得:
取

$$\tau = 10^{-2}, \|WS_{11}\|_{\infty} < 0.877,$$

$$Q_1 = \frac{s+1}{10^{-2}s+1}, C_1 = \frac{10^2(s+1)}{s},$$

满足假设 2. 验证同时镇定约束条件, 解得 $Q_2 = \frac{s+1}{1.01s+2} \in H$, 且可验证 $\|WS_{21}\|_{\infty} = 0.333$. P_1, P_2, L_{11}, L_{21} 的大致图形如图 5.

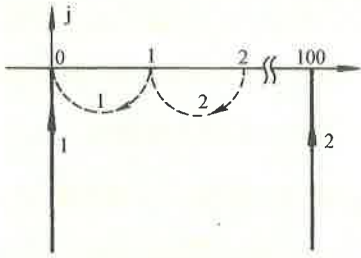


图 5 例 2 奈氏曲线
Fig. 5 Nyquist curve of example 2

4 结束语 (Conclusion)

本文就一类具有奈氏曲线意义下嵌套结构的稳定最小相位对象 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 直接利用这些对象的奈氏曲线所提供的信息, 找到了 $\max_{1 \leq i \leq m} \|WS_{i1}\|_{\infty}$,

然后应用同时镇定控制器参数化结果作性能设计. 稳定最小相位对象是控制工程中常遇到的, 可以认为该方法是一种实用的工程方法.

参考文献 (References)

- 1 Sacks R and Murray J. Fractional representations, Algebraic geometry and simultaneous stabilization problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, 27(4): 895 - 903
- 2 Vidyasagar M and Viswanadham N. Algebraic design techniques for reliable stabilization. IEEE Trans. Automat. Contr., 1982, 27(5): 1085 - 1095
- 3 Vidyasagar M. Some results on simultaneous stabilization with multiple domains of stability. Automatica, 1987, 23(4): 535 - 540
- 4 Wu dongnan, et al. Algorithm for simultaneous stabilization of single-input systems via dynamic feedback. Int. J. Control, 1990, 51(3): 631 - 642
- 5 Zhang Cishen, et al. Simultaneous stabilization using an LTI compensator with a sampler and hold. Int. J. Control, 1993, 57(2): 293 - 308
- 6 曹永岩, 孙优贤. 基于互质分解的同时镇定控制器参数化. 控制理论与应用, 1995, 12(4): 503 - 508
- 7 Chen H B and Chow J H. Simultaneous stabilization using stable system inversion. Automatica, 1995, 31(4): 531 - 542
- 8 多依尔 J C 等著. 反馈控制理论. 慕春棣译. 北京: 清华大学出版社, 1993

本文作者简介

王德进 1956年生. 1990年于黑龙江大学应用数学研究所获控制理论与应用专业工学硕士学位. 现为该校自动化系副教授. 目前主要研究领域为最优控制, H_{∞} 控制, 鲁棒控制, 系统辨识与自适应控制等.