第 16 卷第 4 期
1999 年 8 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.4
Aug., 1999

平衡倒立摆系统的鲁棒稳定性分析

曹建福
(西安交通大学自动控制系·西安,710049)

曹福民
(哈尔滨工业大学信息与网络中心·哈尔滨,150001)

摘要: 本文介绍了一种非线性系统的频域稳定性判据,这种方法把非线性系统的稳定性问题转化为级数的收敛问题,文中重点利用该稳定性判据,讨论了倒立摆系统的稳定性问题,所得的理论分析结果与实验数据基本吻合.

关键词: 倒立摆系统; 非线性频谱分析; 稳定性; 广义频率响应函数

The Robust Stability Analysis of a Balance Inverted Pendulum

Cao Jianfu
(Department of Automatic Control, Xi'an Jiaotong University·Xi'an, 710049, P.R.China)

Cao Fumin
(Center of Informantion and Network, Harbin Institute of Technology·Harbin, 150001, P.R.China)

Abstract: The paper introduces a new stability criterion for a class of nonlinear control system, by which the stability of nonlinear system is transformed into the series convergence. With the stability criterion, this paper emphasizedly discusses the stability of a balance inverted pendulum, the theoretically analyzing results obtained are basically according with experimental datas.

Key words: inverted pendulum system; spectral analysis; robust stability; generalized frequency response function

1 引言(Introduction)

倒立摆系统是一个典型的自不稳定系统,它和火箭的飞行及机器人关节运动有许多相似之处,因此控制界对它的研究兴趣一直不减,人们已经提出了许多倒摆控制方案,并对倒立摆系统的稳定性和镇定问题进行了大量的研究.但目前在所有的研究成果中几乎都假设铜棒的摆动倾斜角小于 5°,即接近 0°,然后再利用线性化方法进行近似处理,实际上当倒摆受到外界振动干扰时,倾斜角往往会超过 5°,甚至到 15°,这时倒立摆系统已经表现出强烈的非线性特性.而用非线性系统理论,对平衡倒立摆系统的稳定性进行严格分析,这方面的报道还不多见.

本文利用非线性系统的频谱理论,讨论了倒立摆系统的非线性频域特性,并重点对它的鲁棒稳定性进行了研究,所得的理论分析结果与实验数据基本吻合.

2 非线性系统的频域稳定性判据(Frequency stability criterion of nonlinear system)

利用李雅普诺夫方法,讨论非线性系统的稳定性,已经有较长的历史,但对于一般的系统要找到合适的李雅普诺夫函数是很困难的.文[2~4]利用广义频率响应函数(GFRF),研究了非线性控制系统的稳定性问题,并得到了下面的稳定性判据.

定理 1 对于多项式类非线性开环系统

$$\sum_{n=1}^{N}\Big[\sum_{p_1=0}^{M}\cdots\sum_{p_n=0}^{M}\Big(a_{n,p_1,\cdots,p_n}\prod_{i=1}^{n}D^{p_i}y(t)+\sum_{p_{n+1}=0}^{M}\cdots\sum_{p_{2n}=0}^{M}b_{n,p_1,\cdots,p_{2n}}\prod_{i=1}^{n}\prod_{k=n+1}^{2n}D^{p_i}y(t)D^{p_k}u(t)+c_{n,p_1,\cdots,p_n}\prod_{i=1}^{n}D^{p_i}u(t)\Big)\Big]=0. \tag{1}$$

式中 D 表示微分算子,M 为最大的微分阶数,N 是最大的乘积次数,a,b,c 是系数,u 和 y 分别是输入和输出变量.$\hat{h}_n(\mathrm{j}\omega_1,\cdots,\mathrm{j}\omega_n)$ 表示其 n 阶 GFRF,$A_1(s)$ 表示线性部分的传递函数,如果

1) 任意 $n\in\mathbb{N}$,$\hat{h}_n(\mathrm{j}\omega_1,\cdots,\mathrm{j}\omega_n)$ 是真有理分式;

2) $A_1(s)=\sum_{p_1=0}^{M}a_{1,p_1}s^{p_1}$ 是稳定多项式,即 A_1 的所有零点都在 S 平面的左半开平面上;

3) GFRF 范数级数 $\{\sum_{i=1}^{n}\|\hat{h}_i\|_\infty\}$ 是收敛的,那么非线性开环系统是 L_2 稳定的.

这个稳定性判据条件,把非线性系统的稳定性问题转化为级数的收敛问题.

定理 2 对于非线性闭环控制系统,r 为参考输入信号,$\hat{h}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 表示对象的 GFRF,$\hat{s}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 表示控制器的 GFRF,如果

本文于 1997 年 8 月 19 日到.1998 年 6 月 25 日收到修改稿.

1) 对 $n \in \mathbb{N}$, $\hat{h}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 和 $\hat{s}_n(w_1,\cdots,w_n)$ 是 ω_i 的真有理分式, $i = 1,2,\cdots,n$;

2) 相应的线性闭环系统是 L_2 稳定;

3) 令

$$\|\hat{h}_n\|_\infty = \sup_{\omega_1,\cdots,\omega_n}\left|\hat{h}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)\right\| = \beta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|\hat{s}_1\|_\infty = \sup_{\omega_1}\left|\hat{s}_1(\omega_1)\right| = \lambda_1 > 0,$$

$$\|\hat{s}_n\|_\infty = \sup_{\omega_1,\cdots,\omega_n}\left|\hat{s}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)\right| = \lambda_n < \alpha_n\lambda_1^n, \quad n \geqslant 2,$$

$$\varphi_1 = \beta_1, \quad \varphi_n = \sum_{m-1}^{n}\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\beta_m\alpha_{k_1}\cdots\alpha_{k_m}, \quad n \geqslant 2, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

$$\|g_1\|_\infty = \sup_{\omega_1}\left|(1+\hat{h}_1(\omega_1))\hat{s}_1(\omega_1))^{-1}\right| = \rho_1 > 0,$$

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_n = \rho_1\sum_{m=2}^{n}\sum_{k_1+\cdots+k_m=n}\varphi_m\lambda_1^m\theta_{k_1}\cdots\theta_{k_n}, \quad n \geqslant 2, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

级数 $\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_m\lambda_1^m$, $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\rho_1^n$ 是收敛的;

4) $\hat{r} \in H_1(-\infty,\infty)$, 即输入信号频谱是绝对可积, 那么跟踪系统是闭环内部 L_2 稳定.

3 单摆系统的非线性频谱分析(Nonlinear spectral analysis of single pendulum)

单摆系统的运动方程为:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\rho}{mL^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \pm \frac{g}{L}\sin\theta = \frac{1}{mL^2}u(t), \tag{2}$$

其中, ρ 为摆杆运动的阻尼系数, L 为相对摆长, g 为重力加速度, u 是施加给摆杆的作用力矩, 由泰勒级数知, $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$, 取前两项代入到式(2)中得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\rho}{mL^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \pm \frac{g}{L}\theta \mp \frac{g}{3!L}\theta^3 = \frac{1}{mL^2}u(t). \tag{3}$$

令 $\alpha = \frac{1}{mL^2}$, $b = \frac{\rho}{mL^2}$, $c = \pm\frac{g}{L}$,

则非线性微分方程(3)可变为

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c\theta - \frac{c}{6}\theta^3 = \alpha u(t). \tag{4}$$

式(4)中, $N = 2, M = 3$, 属于纯输出非线性系统, 由 GFRF 变换算法, 得

$$\hat{h}_1(\omega_1) = \frac{\alpha}{-\omega_1^2 + b\omega_1 j + c},$$

$$\hat{h}_2(\omega_1,\omega_2) = 0,$$

$$\hat{h}_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{c/6}{-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2 + b(\omega_1+\omega_2+\omega_3)j + c}\cdot \hat{h}_1(\omega_1)\hat{h}_1(\omega_2)\hat{h}_1(\omega_3). \tag{5}$$

很显然当 c 为负时, 一阶特征多项式 $A_1(s)$ 是不稳定的, 由开环系统稳定性的判据知上拉摆是自不稳定的系统, 对于下拉摆即当 c 为正时, 一阶特征多项式 $A_1(s)$ 是稳定的, 这时开环系统的稳定性还与高阶 GFRF 相关. 若参数取为 $L = 4, m = 1, \rho = 0.8$, 那么下拉摆的运动方程为:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 0.05\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + 2.45\theta - 0.41\theta^3 = u(t). \tag{6}$$

这时它的 GFRF 是

$$\hat{h}_1(\omega_1) = \frac{1}{-\omega_1^2 + 0.05\omega_1\mathrm{j} + 2.45},$$

$$\hat{h}_2(\omega_1,\omega_2) = 0,$$

$$\hat{h}_3(\omega_1,\omega_2,\omega_3) = \frac{0.41\cdot\hat{h}_1(\omega_1)\hat{h}_1(\omega_2)\hat{h}_1(\omega_3)}{-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2 + 0.05(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\mathrm{j} + 2.45}. \tag{7}$$

由定理1, 研究下拉摆的稳定性问题: 1) n 阶 GFRF 是真有理分式; 2) 相应的线性部分是稳定的; 3) $\rho_1 = 12.78, \rho_2 = 0, \rho_3 = 5.2395, \theta_1 = 1, \theta_2 = 0, \theta_3 = 5.2395, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 27.45, \cdots$, 然后经过循环验证知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\rho_1^n$ 是发散的, 那么由定理知此时下拉摆可能是稳定的, 也可能是不稳定的, 因为此时阻尼系数较小, 下拉摆几乎做等幅振荡运动, 幅值的衰减量较小. 若将 ρ 值增大, 当 $\rho > 8$ 时, $\rho_1 = 1.2924, \rho_2 = 0, \rho_3 = 0.5307, \theta = 1, \theta_2 = 0, \theta_3 = 0.5307, \theta_4 = 0, \theta_5 = 0, \theta_6 = 0.2816, \cdots$, 经过循环验证得, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\rho_1^n$ 是收敛的, 由定理1知此时下拉摆是稳定的, 这与实际情况相符.

从式(7)可以得出, 一阶谱峰频率为0.25(Hz), 因为下拉摆存在三阶频率响应函数, 并有三阶谱峰频率为(0.25,0,0), (0,0.25,0), (0,0,0.25), (−0.25, 0.25,0.25), (0.25, −0.25,0.25), (0.25, −0.25, 0.25), 因此当给下拉摆施加一个正弦激励时, 在输出响应中必有三阶谐波分量存在, 从实际测量得到的单摆输出频谱图可以很好地说明这个现象.

4 平衡倒立摆系统的非线性数学模型(Nonlinear mathematical model of balance inverted pendulum)

图1是平衡倒立摆系统的力学示意图，将摆杆视为钢体，长度为$2L$，一般有2 ~ 3m，M表示小车，

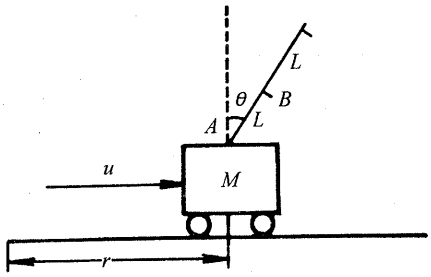

图1 平衡倒立摆系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of balance inverted pendulum

重量为kg，与原点的位移为r，给它施加的力矩为u. 摆杆的重量设为m，重心在B点，它可绕A点旋转，旋转角设为θ，当小车在水平方向运动时，若忽略摩擦力矩的非线性，则由牛顿第二定律得

$$M\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}+m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(r+L\sin\theta)=u(t). \tag{8}$$

由摆绕A点的旋转运行，得

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=mgL\sin\theta-\left(m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right)L\cos\theta, \tag{9}$$

式中，J是摆杆相对于A点的转动惯量，并且$J=\frac{4}{3}mL^2$，用$\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{3!}$，$\cos\theta\approx1-\frac{\theta^2}{2!}$代入式(8)和式(9)，则有

$$(M+m)\ddot{r}+mL\ddot{\theta}-mL\theta\dot{\theta}^2-\frac{mL}{2}\theta^2\ddot{\theta}=u(t). \tag{10}$$

将式(10)代入式(9)，并忽略包含$\theta^4\cdot\ddot{\theta}$和$\theta^3\cdot\dot{\theta}^2$项，得

$$\ddot{\theta}-\frac{3(M+m)g}{(4M+m)L}\theta+\frac{(M+m)g}{2(4M+m)L}\theta^3+\frac{3m}{4M+m}\theta\dot{\theta}^2+\frac{3m}{4M+m}\theta^2\ddot{\theta}+\frac{3}{(4M+m)L}u-\frac{3m}{2(4M+m)L}u\theta^2=0. \tag{11}$$

式(11)是摆杆旋转运动的微分方程描述，很显然这是一个单输入单输出多项式类非线性系统，$M=3$，$N=3$. 选定参数$M=0.145\mathrm{kg}$，$m=0.03\mathrm{kg}$，$L=0.125\mathrm{m}$，得到下式

$$\ddot{\theta}-67.578\theta+11.2455\theta^3+0.1475\theta\dot{\theta}^2+0.1475\theta^2\ddot{\theta}+39.3185u-19.66\theta^2u=0. \tag{12}$$

这个回路相应的线性系统方程是$\ddot{\theta}-67.568\theta+39.3185u=0$，线性传递函数为

$$\hat{h}_1(s)=\frac{-39.318}{s^2-67.568}. \tag{13}$$

从式(13)可看出，它有两个极点，其中一个在S右半平面上，因此倒立摆车是一个自不稳定系统. 倒立摆车加上滑轮、伺服电机、功率放大器和控制器，组成的自动平衡倒立摆系统，文[1]所构造的控制器是线性控制器，设它的微分方程描述形式为

$$S(\ddot{\theta},\dot{\theta},\theta,\ddot{r},\dot{r},r,u)=0. \tag{14}$$

其中S为线性算子，在这个控制器中输出变量θ和r是交互作用的. 如果运动位移可以无限长，即让倒摆在圆轨道上运动的话，上述倒立摆控制器去掉变量r的作用后仍能稳定，这时控制器变为$S(\ddot{\theta},\dot{\theta},\theta,u)=0$，该控制器传递函数为

$$\hat{s}(s)=\frac{\hat{u}(s)}{\hat{\theta}(s)}=\frac{as^2+bs+c}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}. \tag{15}$$

式(15)中的时间常数T_1，T_2，和T_3都比较小，故文[1]在讨论时略去了这三个一阶惯性环节的作用. 此时，平衡倒立摆系统的方框图如图2所示，系统分成了两个独立的回路，图中S表示控制器算子，G为摆角θ回路的算子，F表示位移回路的算子，下面将主要分析摆角θ回路的频率特性和稳定性.

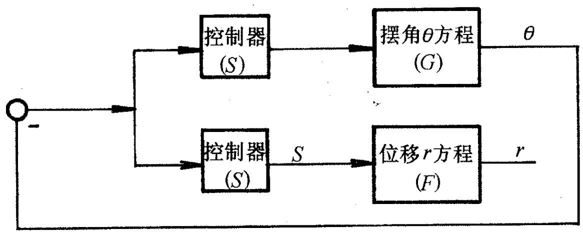

图2 自动平衡倒立摆系统方框图

Fig. 2 Block diagram of balance inverted pendulum

5 自动平衡倒立摆系统的非线性频谱分析 (Nonlinear spectral analysis of automatic balance inverted pendulum)

由式(12)很明显看出，$\theta\dot{\theta}^2$项和$\theta^2\ddot{\theta}$项的系数与其它项相比较小，因此在下面的讨论中略去它们对回路的影响，而采用下面的微分方程

$$\ddot{\theta}-67.578\theta+11.2455\theta^3+39.3185u-19.66\theta^2u=0. \tag{16}$$

式(16)描述的系统属于多项式类非线性系统，$M=2$，$N=3$，并存在纯输出项和乘积项. 由多项式类非线性系统GFRF的递推算法，可得到倒立摆杆旋转运动的GFRF为

$$\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_1)=\frac{39.3185}{-\omega_1^2+67.568},\quad \hat{h}_2(\mathrm{j}\omega_1,\mathrm{j}\omega_2)=0,$$

$$\hat{h}_3(\mathrm{j}\omega_1,\mathrm{j}\omega_2,\mathrm{j}\omega_3)=-A_1^{-1}(\mathrm{j}(\omega_1+\omega_2+\omega_3))[A_3(\mathrm{j}\omega_1,\mathrm{j}\omega_2,\mathrm{j}\omega_3)\cdot\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_1)\cdot$$

$$\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_2)\cdot\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_3)+B_{2,1}(\mathrm{j}(\omega_1+\omega_2),\mathrm{j}\omega_3)\cdot\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_1)\cdot\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_2)]=$$

$$\frac{39.3185^3\times[-19.66\omega_3^2+886]}{[-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2+67.568]\cdot(-\omega_1^2+67.568)(-\omega_2^2+67.568)(-\omega_3^2+67.568)}.$$

一阶幅频图和相频图见图3和图4.三阶幅频图和相频图见图5和图6,图中令 $f_3=0(\mathrm{Hz})$.

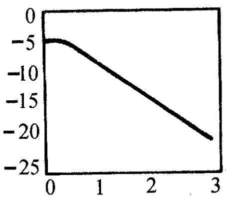

图3　一阶幅频图
Fig. 3　One order gain frequency diagram

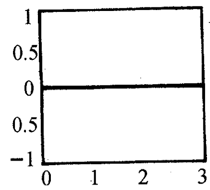

图4　一阶相频图
Fig. 4　One order phase frequency diagram

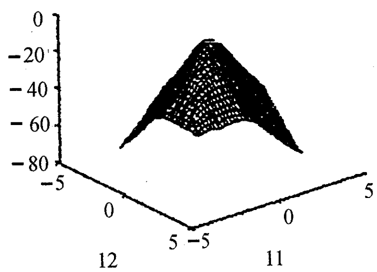

图5　三阶幅频图
Fig. 5　Three order gain frequency diagram

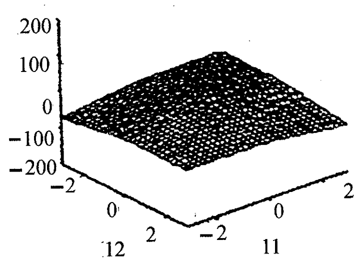

图6　三阶相频图
Fig. 6　Three order phase frequency diagram

现由定理2讨论它的稳定性,很显然对于任意的 n 阶频率响应函数 $\hat{h}_n(\omega_1,\cdots,\omega_n)$ 和 $\hat{s}_n(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$ 都是 ω_i 的真有理分式,由实验数据知,$a=15.6$,$b=379.3$,$c=0.1331$,$T_i\ll 1$,那么该系统对应的线性闭环系统的传递函数为

$$\hat{g}_1(s)=[1+\hat{h}_1(s)\hat{s}_1(s)]^{-1}=$$

$$-\frac{s^2-67.568}{614s^2+12554s+73}.$$

它的特征多项式是 $s^2+20.45s+0.12$,有两个极点 -20.45,-0.01,这两个极点都在左半开平面上,因此线性闭环系统是稳定的.

又因

$$\lambda_1=\|\hat{s}_1\|_\infty=\sup_{w_1}|\hat{s}(\omega_1)|=0.1331,$$

$$\lambda_n=0,\quad \alpha_n=0,\quad n\geqslant 2,$$

$$\beta_1=\|\hat{h}_1\|_\infty=\sup_{w_1}|\hat{h}_1|=0.58,$$

$$\beta_2=0,\quad \beta_3=2.56,\quad \cdots,$$

$$\rho_1=\sup_{\omega_1}|(1+\hat{h}_1(\mathrm{j}\omega_1)\hat{s}(\mathrm{j}\omega_1))^{-1}|=$$

$$\sup_{\omega_1}\left|\frac{\omega_1^2+67.568}{-614\omega_1^2+12554\omega_1 j+73}\right|=0.0016,$$

$$\varphi_1=\beta_1=0.58,\quad \varphi_2=0,\quad \varphi_3=2.56,\cdots,$$

$$\theta_1=1,\quad \theta_2=0,\quad \theta_3=0.006,\quad \cdots,$$

通过循环验证知无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_m\lambda_1^m$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\rho_1^n$ 是收敛的,根据定理2可得到摆杆系统的旋转运动是稳定的,即摆杆能在垂直位置自动保持平衡,依据同样的方法,也可以分析摆车在水平方向上移动时的稳定性.

6　结束语(Conclusion)

本文应用频谱方法,研究了两种单摆系统的频率响应特性和稳定性问题,并且重点讨论了平衡倒立摆系统的鲁棒稳定性,所做的理论分析和实验数据基本一致.通过对这几种实际的系统进行分析,可以看出利用频谱分析方法,可较好地解释非线性因素对系统性能的影响.另外,本文所使用的研究方法,也适用于其它非线性控制系统的稳定性分析.

参考文献(References)

1　黄永宣.自动平衡倒置摆系统——一个有趣的经典控制理论教学实验装置.控制理论与应用,1987,11(3):92-96

2　Han Chongzhao and Cao Jianfu. Stability of nonlinear conrtol system on generalized frequency response functions. 控制理论与应用,1996,13(5):573-582

3　Han Chongzhao and Cao Jianfu. Stability of nonlinear closed-loop control system on generalized frequency response functions. 控制理论与应用,1997,14(6):794-802

4　曹建福,韩崇昭.非线性控制系统的频域稳定性判据.西安交通大学学报,1998,31(3):27-32

本文作者简介

曹建福　1963年生.1983年毕业于西安交通大学计算机系,1996年在西安交通大学系统工程研究所获博士学位,曾为北京机床所工程师,现为西安交通大学自动控制系副教授.研究兴趣为非线性控制系统,计算机集成制造系统(CIMS)和数控技术.

曹福民　1965年生.1991年毕业于哈尔滨工业大学计算机系并获硕士学位,现为哈尔滨工业大学信息与网络中心讲师.研究兴趣为Internet网络,信息系统的规划与设计和非线性控制系统.