

一种反数字滤波器 (IDF) 特性的研究与分析*

冯占林 曹淑琴 李衍达

(清华大学自动化系智能技术与系统国家重点实验室·北京, 100084)

摘要: 研究了 IDF 的频率特性, 并与数值微分频率特性、典型微分环节的频率特性进行了比较, 然后对其进行误差分析. 通过这一研究, 找出了通频带与离散步长 Δt 的近似关系, 得出误差与离散步长 Δt 成正比的结论, 为其得到更好的应用奠定了基础.

关键词: 反数字滤波器; 数值微分; 频率特性

Character Analysis of an Inverse Digital Filter

Feng Zhanlin, Cao Shuqin and Li Yanda

(State Key Laboratory of Intelligent Technology and Systems, Department of Automation, Tsinghua University, Beijing, 100084, P. R. China)

Abstract: IDF (Inverse Digital Filter) was proposed recently to solve the problem in control. In this paper, we study the frequency characteristics of IDF, and then compare it with that of numerical differentiation and typical differentiator. Error analysis is also performed. As a result, we find the approximate relation between discrete step Δt and passband, and get the conclusion that the error of IDF is proportional to Δt .

Key words: inverse digital filter; numerical differentiation; frequency characteristic

1 前言 (Introduction)

IDF 是 Inverse Digital Filter 的简称, 是本文作者为解决控制领域中的一类反问题提出来的, 故称对于控制问题的反数字滤波器^[1]. 在实际中, 对某些系统, 如导航系统、高稳测试系统等, 研究一种能够快速、准确、可靠地测出所需信号 (如: 系统漂移分量, 输入信号等) 的更有效方法具有重要意义. 目前, 许多学者从事这方面的研究工作, IDF 就是在这一背景下研究出来的一种方法. 本文的目的, 就是对 IDF 特性进行综合研究和分析, 为其得到进一步应用提供理论保证.

2 IDF 的频率特性 (Frequency characteristics of IDF)

IDF 的思想是针对控制系统建立起来的. 根据系统传递函数的特征多项式为实根和虚根两种情况, 构造 IDF 的两种典型的形式, 即分别称之为 I 阶 IDF-1, 二阶 IDF-2, 它们具有如下拉氏变换形式^[1]:

$$W_1^*(s) = \frac{e^{-s\Delta t} - e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (1)$$

$$W_2^*(s) = \frac{e^{2s\Delta t} - 2e^{s\Delta t}e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}{1 - 2e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}. \quad (2)$$

其中 $T, \Delta t, \beta, \Omega$ 分别为 IDF 的时间常数, 离散步长,

衰减系数, 角频率.

下面分析它们的频率特性.

对 (1) 式, 令 $s = j\omega$, 得

$$W_1^*(j\omega) = \frac{\cos\omega\Delta t - e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}} + j \frac{\sin\omega\Delta t}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (3)$$

$$A(\omega T) = \sqrt{\left(\frac{\cos\omega\Delta t - e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}\right)^2 + \left(\frac{\sin\omega\Delta t}{1 - e^{-\Delta t/T}}\right)^2},$$

$$\varphi(\omega T) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{\sin\omega\Delta t}{\cos\omega\Delta t - e^{-\Delta t/T}}\right), & \omega\Delta t \leq \arccos(e^{-\Delta t/T}), \\ \pi + \arctg\left(\frac{\sin\omega\Delta t}{\cos\omega\Delta t - e^{-\Delta t/T}}\right), & \arccos(e^{-\Delta t/T}) < \omega\Delta t \leq \pi, \end{cases}$$

$$L(\omega T) = 20\log A(\omega T).$$

其中 $A(\omega\Delta t), L(\omega\Delta t), \varphi(\omega\Delta t)$ 分别为幅频特性, 对数幅频特性和相频特性, 对应 $\Delta t/T = 0.1$ 和 0.01 时的对数幅频特性和相频特性如图 1 所示.

对 (2) 式, 令 $s = j\omega$, 得

$$W_2^*(j\omega) = \frac{\cos 2\omega\Delta t - 2e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t\cos\omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}{1 - 2e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}} + j \frac{\sin 2\omega\Delta t - 2e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t\sin\omega\Delta t}{1 - 2e^{-\beta\Delta t}\cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}}. \quad (4)$$

* 国家教委留学回国人员科研启动资金和国家博士后科学资助基金 (中博基 [1998] 6 号) 资助项目.
本文于 1997 年 12 月 1 日收到, 1998 年 12 月 3 日收到修改稿.

对应 $\Delta t/T = 0.1$ 和 0.01 时的对数幅频特性和相频特性如图 2 所示。

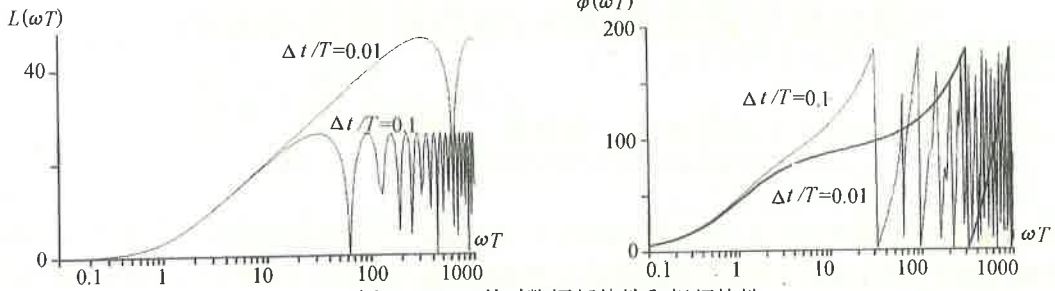


图 1 IDF-1 的对数幅频特性和相频特性

Fig. 1 Amplitude-phase frequency characteristics of IDF-1

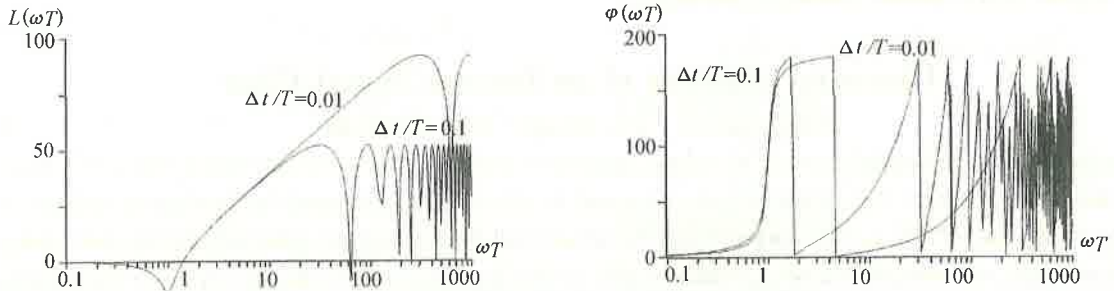


图 2 IDF-2 的对数幅频特性和相频特性

Fig. 2 Amplitude-phase frequency characteristics of IDF-2

由频率特性可以看出, IDF 的幅频特性和相频特性是周期性变化的, 其通频带与离散步长 Δt 有关, Δt 越小, 则通频带越宽; 反之亦然. 另外, 由相频特性可见, 相位发生“卷绕”^[3,4]. 这是因为反正切规定, 在 1, 2 象限的角度为 $0 \sim \pi$, 而在 3, 4 象限的角度为 $-\pi \sim 0$. 当角度连续从 $0 \sim 2\pi$ 变化时, 实际计算的结果是从 0 到 π , 再由 $-\pi$ 到 0, 这样, 出现了跳变. 若要得到连续的相频曲线, 可在发生跳变处相继加上 2π , 称为“解卷绕”. 本文没有进行“解卷绕”, 只是实际计算得出的曲线, 但这并不影响分析结果.

为了减少误差, 构建了高精度的 IDF, 它的思想就是对某一时刻的估值取前向和后向估值的均值. 令 $X[\cdot], Y[\cdot]$ 分别代表系统的输入, IDF 输入的离散值, n 为时刻, $\bar{X}_1^*[n\Delta t], \bar{X}_2^*[n\Delta t]$ 为前向和后向 IDF 的输出值, $\bar{X}_{12}^*[n\Delta t]$ 为其均值, 即

$$\bar{X}_1^*[n\Delta t] = \frac{Y[n\Delta t] - Y[(n-1)\Delta t]e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (5)$$

$$\bar{X}_2^*[n\Delta t] = \frac{Y[(n+1)\Delta t] - Y[n\Delta t]e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (6)$$

$$\bar{X}_{12}^*[n\Delta t] = \frac{\bar{X}_1^*[n\Delta t] + \bar{X}_2^*[n\Delta t]}{2}. \quad (7)$$

它们的几何意义如图 3 所示.

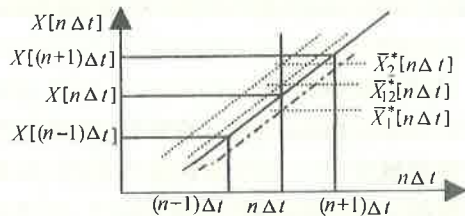


图 3 系统输入值与估值信号关系示意图

Fig. 3 Relationship between input of the system and output of the IDF

与一阶, 二阶典型的 IDF 相对应, 改进的高精度的 IDF 分别称为一阶 IDF-11, 二阶 IDF-21, 其拉氏变换形式如下:

$$W_{11}^*(s) = \frac{e^{-s\Delta t} + (1 - e^{-\Delta t/T}) - e^{-s\Delta t}e^{-\Delta t/T}}{2(1 - e^{-\Delta t/T})}, \quad (8)$$

$$W_{21}^*(s) = \frac{1 + a_1e^{-s\Delta t} + a_2e^{-2s\Delta t} + a_3e^{-3s\Delta t} + a_4e^{-4s\Delta t}}{3(1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t})} e^{2s\Delta t}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t e^{-\beta\Delta t}, \\ a_2 &= 1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t e^{-\beta\Delta t} + e^{-2\beta\Delta t}, \\ a_3 &= -2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t e^{-\beta\Delta t} + e^{-2\beta\Delta t}, \\ a_4 &= e^{-2\beta\Delta t}. \end{aligned}$$

相应地, 令 $s = j\omega$, 得

$$W_{11}^*(j\omega) = \frac{1}{2}((1 + \cos\omega\Delta t) + jD\sin\omega\Delta t), \quad (10)$$

$$A(\omega T) = \sqrt{(1 + \cos\omega\Delta t)^2 + D^2(\sin\omega\Delta t)^2},$$

$$\varphi(\omega T) = \arctg\left(\frac{D\sin\omega\Delta t}{1 + \cos\omega\Delta t}\right),$$

$$D = (1 + e^{-\Delta t/T}) / (1 - e^{-\Delta t/T}),$$

$$W_{2l}^*(j\omega) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(1 + e^{-2\beta\Delta t})(\cos\omega\Delta t + \cos 2\omega\Delta t) - 4e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t \cos\omega\Delta t}{1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}} \right) + j \frac{1}{3} \frac{(1 - e^{-2\beta\Delta t})(\sin\omega\Delta t + \sin 2\omega\Delta t)}{1 - 2e^{-\beta\Delta t} \cos\Omega\Delta t + e^{-2\beta\Delta t}} \quad (11)$$

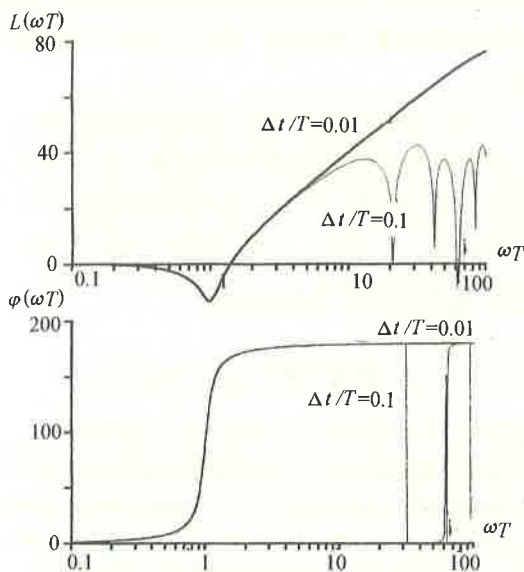


图 4 IDF-21 的对数幅频特性和相频特性
Fig. 4 Amplitude-phase frequency characteristics of IDF-21

图 4 给出了 IDF-21 对应 $\Delta t/T = 0.1$ 和 0.01 时的幅频特性和相频特性. 由此可见, 精度得到提高, 其频率特性改善, 特别是相频特性.

3 IDF 的特性分析 (Characteristic analyses of IDF)

3.1 与系统典型微分环节频率特性的比较 (Comparison with the frequency characteristics of typical differential unit of system)

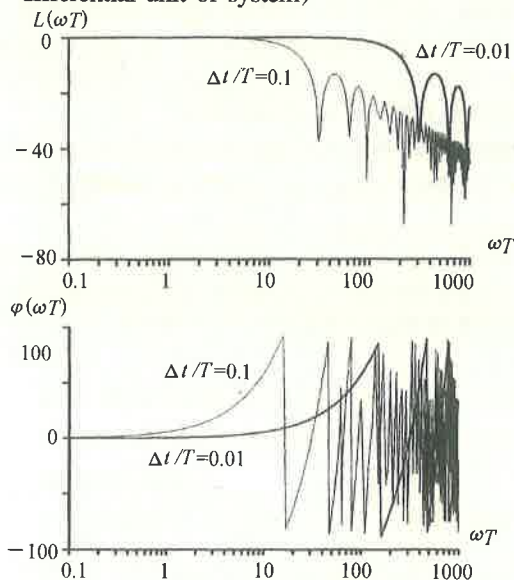


图 5 IDF-1 与一阶积分器相联接后的幅频特性和相频特性
Fig. 5 Frequency characteristics of logarithm amplitude and phase after IDF-1 and integral unit of order one being connected

经过计算与比较可知, 在频率 $\omega \leq 1/\Delta t$ 条件下, 典型 IDF-1, IDF-2 的幅频特性和相频特性与系统典型一阶、二阶微分环节的幅频特性和相频特性近似相同. 图 5 给出了将 IDF-1 与一阶积分器(传递函数为 $1/(1 + Ts)$) 相联接后的幅频特性和相频特性. 由此可见, 在 $\omega = 1/\Delta t$ 处, 产生比较小的误差, 若采用高精度的 IDF 则误差更小.

3.2 与数值微分频率特性的比较 (Comparison with the frequency characteristics of numerical differential)

对式(1)进行反变换得到时域形式, 然后对式中 $e^{-\Delta t/T}$ 进行台劳级数展开并取前两项, 得到与利用一阶牛顿插值多项式取前两项相同的结果^[2]. 该结论表明, 当步长 Δt 比较小时, IDF 各式中对 $e^{-\Delta t/T}$ 进行台劳级数展开并取一定项数后可得相应数值微分结果, 即它们的频率特性是近似相同的, 通过与文献^[2]中的结果相比较可验证这一结论, 但 IDF 具有适于应用的一般形式.

3.3 误差分析 (Error analyses)

由于 IDF 是建立在离散数据基础之上, 因此, 这就不可避免带来离散误差.

对于 k 阶线性系统, 若系统输入信号为 $X = \Omega t$, 令 $\delta_{1k}, \delta_{2k}, \delta_{12k}$ 分别为 $\bar{X}_1^*[n\Delta t], \bar{X}_2^*[n\Delta t], \bar{X}_{12}^*[n\Delta t]$ 与 $X[n\Delta t]$ 之间的稳态误差, 则有如下关系式:

$$\delta_{1k} = \bar{X}_1^*[n\Delta t] - X[n\Delta t] = k\Omega\Delta t \frac{e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (12)$$

$$\delta_{2k} = \bar{X}_2^*[n\Delta t] - X[n\Delta t] = k\Omega\Delta t \frac{e^{-\Delta t/T}}{1 - e^{-\Delta t/T}}, \quad (13)$$

$$\delta_{12k} = \bar{X}_{12}^*[n\Delta t] - X[n\Delta t] = k\Omega\Delta t/2. \quad (14)$$

由此看出, 误差与离散步长 Δt 成比例, Δt 越小, 误差越小. 并且, 由 $\delta_{12k}, \delta_{1k}, \delta_{2k}$ 的关系证实, 改进的 IDF 精度得到提高.

由系统理论可知, 对于 k 阶线性系统, 其暂态响应可表示为:

$$y = \sum_{i=1}^k b_i e^{-t/T_{0i}}. \quad (15)$$

其中 $T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0k}$ 为系统时间常数; b_1, b_2, \dots, b_k

是由系统状态所确定的参数. 将其代入 J 阶 IDF-1 后可求得 IDF 输出与系统输入信号之间的误差, 其关系式为:

$$\delta = \sum_{i=1}^k B_i e^{-n\Delta t/T_i}, \quad (16)$$

$$B_i = b_i \frac{\prod_{j=1}^J (e^{-\Delta t/T_{0i}} - e^{-\Delta t/T_j})}{\prod_{j=1}^J (1 - e^{-\Delta t/T_j})}.$$

由此看出, 对不同的系统参数, 即不同的过度过程, 暂态误差不同. 当 $J \geq k$ 且 $T_{0i} = T_i$ 时, 暂态误差为零, 此时, IDF 的输出误差仅为稳态误差, 此特点表明: IDF 可用于系统参数辨识的研究中, 式(16)可作为其判据. 从理论上讲, 在 IDF 用于系统参数辨识的研究中时, 只要所选的 IDF 满足上述条件及输入信号的 k 点信息, 按式(16)即可辨识出系统的参数; 但在实际应用中, 输入信号往往含有噪声, 此时, 噪声将被放大, 误差将增大. 因此, 要采用统计信号处理方法来减少噪声的影响, 即选取信号的长度要增加. 试验表明, 当噪声小于信号能量的 5% 时, 仍可取得满足工程要求的结果. 有关详细内容见文献[5].

4 结论 (Conclusion)

1) 当频率 $\omega \leq 1/\Delta t$ 时, 典型 IDF 频率特性与系统典型微分环节的频率特性近似相同. 该结论表明, 在一定的范围内改变 Δt , 可以改变 IDF 的通频带. 利用 IDF 这一特点可以用来拓宽系统的有效通频带.

2) 当 Δt 比较小时, 典型 IDF 频率特性与数值微分频率特性近似相同. 但是, IDF 比利用数值微分所构成的反数字滤波器具有如下优点:

- i) IDF 不受系统初始条件的影响;
- ii) IDF 具有适于应用的典型形式, 借助这种典型形式可以构成任意阶的 IDF.

3) 改进 IDF 的能改善其本身的频率特性, 特别

是相频特性. 但对于缓慢变化的信号, 应用典型基本形式即可满足要求, 且简单方便.

4) IDF 的误差与 Δt 成比例, Δt 越小, 误差也越小. 当所使用的 IDF 参数与系统参数相等时, 则输出的暂态误差为零. 利用这一特点, 可以对系统进行参数辨识.

5) 综上所述, IDF 可以应用于线性控制系统辨识, 改善系统频率特性等研究领域. 对于 IDF, 离散步长似乎越小越好, 但是, 当信号含有噪声时, 则情况正好相反, Δt 越小, 对噪声放大越大. 因此, 在实际应用中应综合考虑.

参考文献 (References)

- 1 Колосов О С, Фон Чангълинъ. Обратная цифровая фильтрация в залачах управления. В кн.: Межвуз. сб. Науч. тр. Мос. гос. инс. Ралиотехники, электроники и автоматики; Управление и моделирование в сложных технических системах, Москва, 1995, 43 - 45
- 2 Колосов О С, Фон Чжангълинъ. Особенности численного дифференцирования в залачах управления. Ветник МэИ, 1995, 2; 105 - 110
- 3 Tribolet J M. A new phase unwrapping algorithm. IEEE Trans. on Acoustic Speech Signal Process, 1977, 25(2): 170 - 177
- 4 Stearns S D, David R A. Signal Processing Algorithms. Engle-wood Cliffs, NJ; Prentice Hall, 1988
- 5 冯占林, 李衍达. 基于 IDF 的线性控制系统参数辨识算法的实现, 中国控制会议论文集. 北京: 国防大学出版社, 1998, 400 - 404

本文作者简介

冯占林 1963年2月生. 1997年在莫斯科动力学院获博士学位. 1997~1999年为清华大学自动化系博士后. 现工作于信息产业部电子科学研究所系统工程总体部. 主要研究领域为自动控制理论与应用, 系统辨识, 信号处理, 特殊自动化系统等.

曹淑琴 1963年12月生. 1989年在阜新矿业学院获硕士学位. 现在北方工业大学工学院工作. 主要研究领域为控制系统, 工业自动化等.

李衍达 1936年12月生. 中国科学院院士, 教授, 博士生导师, 清华大学信息学院院长. 主要研究领域为自动控制理论与应用, 信号与信息处理, 模式识别与智能系统, 计算机网络等.