

## 广义不确定系统的模糊滑模控制\*

贺爱玲 陈卫田 初学导

(曲阜师范大学自动化研究所·山东曲阜, 273165)

**摘要:** 研究了广义不确定系统的模糊滑模控制问题. 控制结构中采用模糊系统来补偿动态不确定性. 利用李亚普诺夫理论, 证明了闭环系统的所有状态是全局有界的. 由于使用了模糊逻辑切换, 柔化了控制信号, 从而削弱了现有滑模控制存在的高频颤动现象. 最后研究了实际滑动模的近似问题. 仿真结果表明本文设计的控制器是有效的.

**关键词:** 广义系统; 滑模控制; 模糊控制

## Fuzzy Sliding Mode Control for Singular Uncertain Systems

He Ailing, Chen Weitian and Chu Xuedao

(Institute of Automation, Qufu Normal University, Shandong Qufu, 273165, P. R. China)

**Abstract:** The problem of fuzzy sliding mode control for singular uncertain systems is studied in this paper. The control architecture employs fuzzy systems to compensate the dynamic uncertainty. By means of Lyapunov theorem, all states of the closed-loop system are proven to be bounded. Since the proper fuzzy logic switchings are applied, and the control signal is smoothed, the chattering phenomenon which is inherent to the conventional sliding mode control is depressed. Finally, approximation of practical sliding mode is studied. The effectiveness of the controllers designed in this paper is illustrated by computer simulation.

**Key words:** singular systems; sliding mode control; fuzzy control

### 1 引言(Introduction)

鉴于近年来广义系统在电网络分析、石油化工、投入产出分析及受限机器人等领域的广泛应用, 促使控制界学者们对其进行深入系统的研究<sup>[1]</sup>, 并已取得了一定的成绩. 但由于奇异系统的复杂性, 它的研究要比正常系统同类问题的研究困难得多. 故迄今为止, 几乎所有的工作都是假定系统结构和参数是已知的, 仅有少量工作涉及了一类特殊外干扰影响下的控制问题. 事实上系统本身不可避免地要受到各种干扰的影响, 此外系统在建模时也往往忽略了一些次要因素的影响, 因而现有的控制方法, 系统的鲁棒性能差. 这就需要我们考虑广义系统的鲁棒性问题.

变结构控制方法的主要优点是对系统的不确定性和外来干扰具有较强的鲁棒性, 只需估计干扰的界限而无需测定其具体值, 并且容易实现<sup>[2,3]</sup>. 但是, 变结构控制方法也有其缺点, 那就是会产生高频颤动现象<sup>[4]</sup>. 这种高频颤动在系统中形成干扰, 可能把系统中存在的未建模成分激励起来, 从而引起更大的干扰, 又由于广义系统本身的复杂性, 这种干扰

极有可能导致系统不稳定. 这就对广义系统应用变结构控制方法造成困难, 因而尽可能的削弱高频颤动现象是十分重要的.

基于滑模控制的特点, Hwang 在文[5]中, 金耀初和蒋静坪在文[6]中, 分别提出了模糊变结构控制方案. 此方案将滑模控制与模糊控制两种设计方法有机地结合起来, 但是没有给出闭环系统的稳定性证明, 而且控制律不能用解析式表示, 决策表的形成也相当复杂. 本文在文[7]提出的滑动模态的基础上, 提出一种模糊滑模控制方案, 用模糊控制补偿动态不确定性, 控制律能用解析式来表示, 而且是连续的, 削弱了文[7]中提出的滑模控制存在的高频颤动现象. 通过构造李亚普诺夫函数, 证明了闭环系统的稳定性. 本文还讨论了实际滑动模的近似问题. 仿真结果表明文中给出的控制律的设计方法是有效的.

### 2 系统描述(System description)

考虑广义系统:

$$E\dot{x} = Ax + Bu + \Delta A(x) + \Delta Bu + Df. \quad (1)$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n$  是状态向量,  $u \in \mathbb{R}^m$  是输入向量,  $f \in \mathbb{R}^r$  是外部扰动.  $E, A, B, D$  分别为相容维数的常值

\* 国家自然科学基金(69674001)和山东省自然科学基金(Q97G02159)资助项目.

本文于1997年7月11日收到. 1998年10月20日收到修改稿.

矩阵.  $E$  为奇异阵,  $\text{rank} E = r < n$ .  $\Delta A(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为系统的不确定量.

对系统作如下假设:

**假设 1**  $(E, A, B)$  强可控,  $B$  列满秩.

**假设 2**  $\det(\lambda E - A)$  不恒等于 0,  $\lambda$  为复数.

**假设 3**  $\text{rank} B = \text{rank}(B, \Delta B) = \text{rank}(B, D) = \text{rank}(B, \Delta A)$ .

由假设 3 知存在  $F \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $H \in \mathbb{R}^{m \times r}$  使

$$\Delta A(x) = BF(x), \Delta B = BG, D = BH.$$

令

$$\eta = F(x) + Gu + Hf,$$

则系统(1)简计为

$$E\dot{x} = Ax + B(u + \eta). \quad (2)$$

**假设 4** 不确定性有界, 即存在正函数  $\rho(x, t)$  使  $\|\eta\| \leq \rho(x, t)$ .

**引理 1** 若系统(1)满足假设 1, 假设 3, 则存在非奇异阵  $Q, R$ , 使系统(1)受限制等价于

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \quad (3)$$

$$E_2\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \eta. \quad (4)$$

且  $(A_{11}, A_{12})$  能控. 其中

$$QAR = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, QER = \begin{bmatrix} I_{n-m} & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

$$QB = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, x = R \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

引理 1 可与文[7]同理得证.

### 3 模糊控制器的设计和稳定性分析 (Fuzzy controller design and stability analysis)

由于  $(A_{11}, A_{12})$  能控, 则存在  $K_1$  使  $A_{11} + A_{12}K_1$  稳定, 进而由 Lyapunov 定理知: Lyapunov 矩阵方程  $P(A_{11} + A_{12}K_1) + (A_{11} + A_{12}K_1)^T P = -I_{n-m} - K_1^T K_1$ , 存在唯一的对称正定解  $P$ .

下面使用二次型综合 Lyapunov 方法使式(3)稳定. 取 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = x_1^T(t) P x_1(t), \quad (5)$$

则  $\dot{V}_1(t) + x_2^T(t) x_2(t)$  沿着方程(3)的解的轨道, 对  $x_2(t)$  求极小得:

$$x_2(t) = -A_{12}^T P x_1(t),$$

此时系统(3)化为

$$\dot{x}_1 = (A_{11} - A_{12}A_{12}^T P) x_1. \quad (6)$$

又由  $\dot{x}_1 = (A_{11} + A_{12}^T K_1) x_1$  稳定知式(6)稳定.

取切换面为

$$S = A_{12}^T P x_1 + x_2. \quad (7)$$

由式(6)稳定知, 在切换面上, 系统为稳定的.

由引理 1 及  $\text{rank} E = r < n$  知, 对于  $E_2$ , 存在  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , 使  $E_2 + K_2$  可逆.

取控制律为

$$u = -K_2 \dot{x}_2 + v, \quad (8)$$

$$v = -\hat{B}_2^{-1}(A_{12}^T P(A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t)) + \hat{A}_{21}x_1(t) + \hat{A}_{22}x_2(t) - (\hat{\rho} + \epsilon)u_f). \quad (9)$$

其中

$$\hat{A}_{21} = (E_2 + K_2)^{-1}A_{21}, \hat{A}_{22} = (E_2 + K_2)^{-1}A_{22},$$

$$\hat{B}_2 = (E_2 + K_2)^{-1}, \hat{\rho} = \|(E_2 + K_2)^{-1}\| \rho.$$

$u_f$  的各个元素为模糊控制器的输出,  $\epsilon > 0$  为正数.

下面给出模糊控制器:

确定  $u_f$  的模糊控制规则定义如下:  $u_f = [u_{f_1}, u_{f_2}, \dots, u_{f_m}]^T$ .

$R_j$ : 若  $S_i$  是  $\bar{A}_{ij}$ , 则  $u_{f_j}$  是  $\bar{B}_{-ij}$  ( $j = -2, -1, 0, 1, 2$ );

输入:  $S_i$  是  $\bar{A}_i$ , 则输出  $u_{f_j}$  是  $\bar{B}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

其中  $\bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}$  的隶属函数如下图所示:

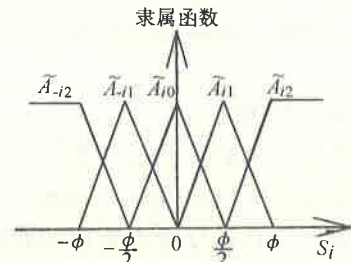


图 1 输入模糊集的隶属函数  
Fig. 1 The membership functions of the input fuzzy sets

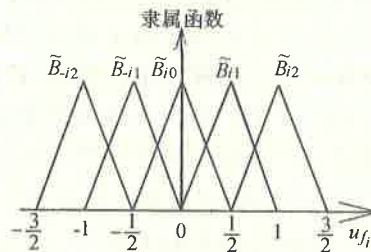


图 2 输出模糊集的隶属函数  
Fig. 2 The membership functions of the output fuzzy sets

由第  $j$  条模糊规则得到的模糊关系为

$$\bar{R}_{ij} = \bar{A}_{ij} \times \bar{B}_{-ij}, (i = 1, 2, \dots, m;$$

$$j = -2, -1, 0, 1, 2)$$

即

$$\bar{R}_{ij}(S_i, u_{f_j}) = \bar{A}_{ij}(S_i) \wedge \bar{B}_{-ij}(u_{f_j}).$$

总的模糊规则所对应的模糊关系为:

$$\bar{R}_i = \bigcup_{j=-2}^2 \bar{R}_{ij}, \quad (10)$$

即

$$\bar{R}_i(S_i, u_{f_i}) = \bigvee_{j=-2}^2 [\bar{A}_{ij}(S_i) \wedge \bar{B}_{-ij}(u_{f_i})],$$

其中  $\bigvee$  表示取 max 运算,  $\wedge$  表示取 min 运算,  $\times$  表示笛卡尔积,  $\bar{A}_{ij}(S_i)$  和  $\bar{B}_{-ij}(u_{f_i})$  分别表示模糊集  $\bar{A}_{ij}$  和  $\bar{B}_{-ij}$  的隶属函数.

采用 max-min 推理合成规则和单元集模糊化方法, 易推得

$$\bar{B}_i(u_{f_i}) = \bigvee_{j=-2}^2 [\bar{A}_{ij}(S_i) \wedge \bar{B}_{-ij}(u_{f_i})].$$

采用重心非模糊化方法可将模糊控制器输出  $\bar{B}_i$  化为精确的控制量:

$$u_{f_i} = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} u_{f_i} \bar{B}_i(u_{f_i}) du_{f_i} / \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \bar{B}_i(u_{f_i}) du_{f_i}, \quad (11)$$

即,

$$u_{f_i} = \begin{cases} 1, & z \leq -1, \\ \frac{(3z^2 + 5.5z + 1.5)}{(4z^2 + 6z + 1)}, & -1 < z \leq -0.5, \\ \frac{(z^2 + 1.5z)}{(4z^2 + 2z - 1)}, & -0.5 < z \leq 0, \\ \frac{(-z^2 + 1.5z)}{(4z^2 - 2z - 1)}, & 0 < z \leq 0.5, \\ \frac{(-3z^2 + 5.5z - 1.5)}{(4z^2 - 6z + 1)}, & 0.5 < z \leq 1, \\ -1, & z > 1, \end{cases} \quad (12)$$

其中  $z = S_i(t)/\phi_i$ .

由式(12)知, 当  $|S_i(t)| > \phi_i$  时,  $u_{f_i}(t) = -\text{sgn}(S_i(t))$ . 显然  $u_{f_i}$  连续. 故  $u_f = [u_{f_1}, u_{f_2}, \dots, u_{f_m}]^T$  连续.

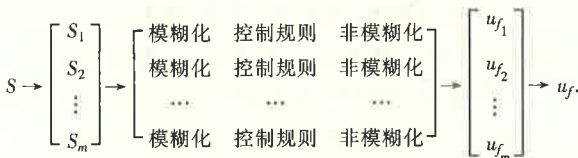


图 3 整个模糊控制器框图

Fig. 3 Configuration for the whole fuzzy controller

将式(8)代入式(4)得:

$$\dot{x}_2 = \hat{A}_{21}x_1 + \hat{A}_{22}x_2 + \hat{B}_2u + (E_2 + K_2)^{-1}\eta. \quad (13)$$

**引理 2** 在  $[a, +\infty)$  上连续的函数  $f(t)$ , 若  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在, 则  $f(t)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

**引理 3** 如果非负函数  $f(t)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续, 且  $\int_0^\infty f(t) dt < \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ .

**定理 1** 考虑由式(8), (9), (12)构成控制律的广义不确定系统(3), (4), 则模糊闭环系统的状态全局有界, 且  $S(t)$  渐近收敛到边界层  $\{x \mid \|S(t)\| < \phi\}$ .

证 令

$$S_{\Delta i}(t) = S_i(t) - \phi_i \text{sat}(S_i(t)/\phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

其中

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ \text{sgn}(x), & |x| > 1, \end{cases}$$

则  $S_{\Delta i}$  连续, 可导. 取

$$V_2(t) = \frac{1}{2} S_{\Delta}^T(t) S_{\Delta}(t),$$

$$V_{2i}(t) = \frac{1}{2} S_{\Delta i}^2(t), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

其中

$$S_{\Delta}(t) = [S_{\Delta 1}(t), S_{\Delta 2}(t), \dots, S_{\Delta m}(t)]^T.$$

则 
$$V_2(t) = \sum_{i=1}^m V_{2i}(t).$$

当  $|S_i(t)| \leq \phi_i$  时,  $S_{\Delta i}(t) = 0$ , 所以此时有

$$\dot{V}_{2i}(t) = 0 \leq -\epsilon \mid S_{\Delta i}(t) \mid = 0$$

当  $S_i(t) > \phi_i > 0$  时, 由式(3), (13), (9), (7)知,

$$\dot{S} = (E_2 + K_2)^{-1}\eta + (\hat{\rho} + \epsilon)u_f,$$

$$\dot{V}_{2i}(t) =$$

$$S_{\Delta i}(t)\dot{S}_{\Delta i}(t) =$$

$$(S_i(t) - \phi_i)([(E_2 + K_2)^{-1}\eta + (\hat{\rho} + \epsilon)u_f]_i) =$$

$$(S_i(t) - \phi_i)([(E_2 + K_2)^{-1}\eta]_i -$$

$$\|(E_2 + R_2)^{-1}\|\rho - \epsilon) \leq$$

$$-\epsilon(S_i(t) - \phi_i) = \epsilon \mid S_{\Delta i}(t) \mid.$$

其中  $[\cdot]_i$  表示向量  $[\cdot]$  的第  $i$  个元素.

同理可证, 当  $S_i(t) < -\phi_i < 0$  时,

$$\dot{V}_{2i}(t) \leq -\epsilon \mid S_{\Delta i}(t) \mid.$$

综上所述, 有

$$\dot{V}_{2i}(t) \leq -\epsilon \mid S_{\Delta i}(t) \mid, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

又由  $V_{2i}(t)$  的定义知,  $V_{2i}(t)$  为单调不增非负函数, 因此  $V_{2i}(t)$  收敛, 因而  $S_{\Delta i}(t)$  有界, 故  $S_i(t)$  有界, 因此  $S(t)$  有界. 又因为  $A_{11} - A_{12}A_{12}^T P$  为稳定矩阵, 故  $x_1(t)$  有界, 又由式(7)知  $x_2(t)$  有界, 所以闭环系统的状态有界. 由  $V_{2i}(t)$  收敛知,  $S_{\Delta i}^2(t)$  收敛, 进而  $\mid S_{\Delta i}(t) \mid$  收敛. 又因为  $S_{\Delta i}(t)$  连续, 由引理 2 知  $\mid S_{\Delta i}(t) \mid$  在  $(0, \infty)$  上一致连续, 又由引理 3 知  $\mid S_{\Delta i}(t) \mid$  收敛到零, 因此  $\|S_{\Delta}(t)\|$  收敛到零, 即  $S(t)$  渐进收敛到边界层, 并在边界层内运动, 实现滑动模运动稳定. 证毕.

### 4 实际滑动模的近似 (Approximation of practical sliding mode)

在切换面  $S(t) = 0$  上的滑动方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x_1 + A_{12}x_2, & (14) \\ E_2\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \eta. & (15) \end{cases}$$

由式(7)~(9),(14),(15)知

$$\dot{S} = A_{12}^T P(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + (E_2 + K_2)^{-1}(A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + u + \eta),$$

于是等效控制  $v_e$  为

$$v_e = -(E_2 + K_2)A_{12}^T P(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 - \eta,$$

故在切换面  $S(t) = 0$  上的滑动方程为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2, & (16) \\ \dot{\bar{x}}_2 = -A_{12}^T P(A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2). & (17) \end{cases}$$

下求系统的实际运动方程

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2, & (18) \\ E_2\dot{\bar{x}}_2 = A_{21}\bar{x}_1 + A_{22}\bar{x}_2 + u + \eta, & (19) \end{cases}$$

实际控制为

$$v = -(E_2 + K_2)A_{12}^T P(A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2) - (E_2 + K_2)\dot{S} - A_{21}\bar{x}_1 - A_{22}\bar{x}_2 - \eta.$$

故系统的实际运动方程:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2, & (20) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) = -A_{12}^T P(A_{11}\bar{x}_1(t) + A_{12}\bar{x}_2(t)) - \dot{S}(t). & (21) \end{cases}$$

实际滑动模与理想滑动模之间有如下结果:

**定理 2** 系统(3),(4)的切换平面为式(7),且(3),(4)的任意解经  $t_1$  时刻后均在边界层  $\|S(t)\| < \phi$  ( $\phi > 0$ ) 内, 设  $\|e_1(0)\| \leq a\phi$ ,  $\|e_2(0)\| \leq b\phi$ , 其中  $e_1(0) = x_1(0) - \bar{x}_1(0)$ ,  $e_2(0) = x_2(0) - \bar{x}_2(0)$ . 则必有

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \|x_1(t) - \bar{x}_1(t)\| = 0$$

关于  $t \in [t_1, \infty)$  一致成立, 其中  $t_1 > 0$  为系统开始后经  $t_1$  时刻进入边界层.

证 略.

### 5 仿真例子 (Simulation example)

**例 1** 考虑具有如下形式的三维奇异系统:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + \Delta A(x) + \Delta Bu + Df), \quad (22)$$

$$\|\Delta A(x) + \Delta Bu + Df\| \leq 0.2x_2^2 e^{-t},$$

易验证, 定理的条件皆成立.

取  $K_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}$ , 则 Lyapunov 矩阵方程之解为

$$P = \begin{bmatrix} 21/2 & -19/4 \\ -19/4 & 13/4 \end{bmatrix}.$$

取切换函数为

$$S = -(19/4)x_1 + x_2 + (13/4)x_3,$$

取  $\epsilon = 0.02$ , 控制律取为

$$u = -\dot{x}_2 + (19/4)x_1 - (13/4)x_2 - (23/4)x_3 - (0.2x_2^2 e^{-t} + 0.02)u_f,$$

其中  $u_f$  是模糊控制器的输出, 取值为式(12).

取  $x_1(0) = 14.6, x_2(0) = 0.1, x_3(0) = 12, \phi = 0.01$ , 则系统的仿真图象如下图所示.

图 4 表明控制是连续的, 基本不存在高频颤动现象. 由图 5, 图 6, 图 7 知系统的状态有界, 且系统经有限时间后进入稳定状态. 仿真结果表明控制律的设计方法是有效的.

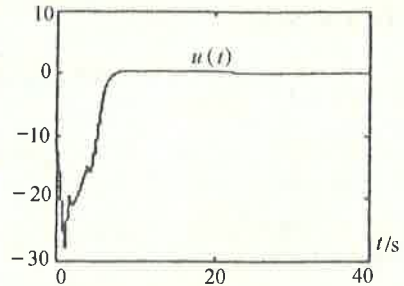


图 4 控制  $u$   
Fig. 4 The control  $u$

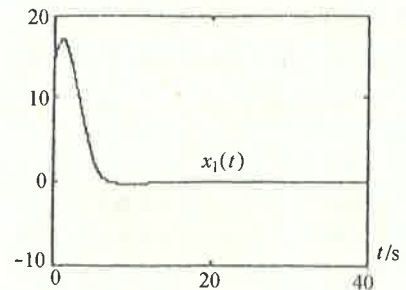


图 5 状态  $x_1(t)$   
Fig. 5 The state  $x_1(t)$

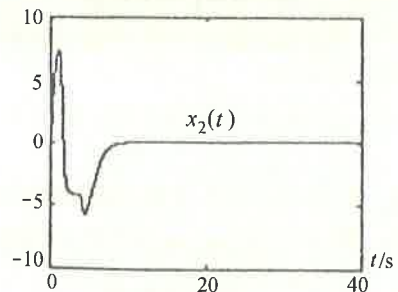
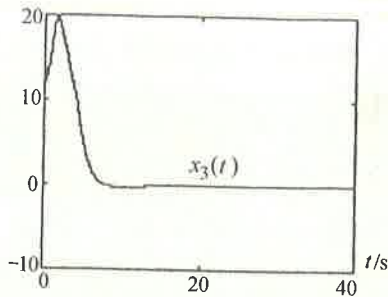


图 6 状态  $x_2(t)$   
Fig. 6 The state  $x_2(t)$

图 7 状态  $x_3(t)$ Fig. 7 The state  $x_3(t)$ 

## 6 结论(Conclusion)

本文将滑模控制和模糊控制相结合来处理广义不确定系统的控制问题,用模糊控制来补偿动态不确定性,以削弱滑模控制本身所具有的高频颤动现象,这样就可以充分利用滑模控制鲁棒性能好的特点.本文给出的模糊控制的设计方法使所得控制是连续的,因而比文[7]给出的滑模控制设计方法所得的控制平滑,柔化了控制信号.仿真结果表明本文给出的控制器的设计方法是有效的.

## 参考文献(References)

- 1 胡跃明,周其节,刘永清.广义系统的变结构控制.控制理论与应用,1993,10(5):567-572

- 2 高为炳.变结构控制的理论及设计方法.北京:科学出版社,1996
- 3 Emelyanov S V, Korovin S K, Nersisian A L and Nisenzon E Y. Output feedback stabilization of uncertain plants: a variable structure systems approach. Int. J. Control, 1992, 55(1): 61-81
- 4 Slotine J J E. Sliding controller design for nonlinear systems. Int. J. Control, 1984, 40(2): 421-434
- 5 Hwang G C and Chang S. A stability approach to fuzzy control design for nonlinear systems. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 48(2): 279-287
- 6 金耀初,蒋静坪.一类非线性系统的模糊变结构控制及应用.控制与决策,1992,7(1):36-40
- 7 温香彩,刘永清.奇异不确定系统的滑动模态控制.控制理论与应用,1995,12(1):114-118

## 本文作者简介

贺爱玲 女.1971年生.1998年于曲阜师范大学自动化研究所获得硕士学位.现在山东省轻工业学院任教.感兴趣的方向是广义系统控制,模糊控制等.

陈卫田 1967年生.于1996年获上海交通大学博士学位.现在曲阜师范大学自动化研究所工作.主要研究方向为不确定非线性系统的自适应控制与鲁棒控制.

初学导 1939年生.曲阜师范大学自动化研究所所长,教授.发表论文40余篇,其中12篇发表于国内外主要学术刊物.主要研究方向为智能控制与自适应控制.

## 征 订 启 事

今年是著名数学家、我国现代控制理论的奠基人关肇直先生诞辰八十周年.为了纪念、缅怀关先生对中国数学和自动控制的卓越贡献以及展望下一世纪我国自动控制的发展前景,《控制理论与应用》杂志将出版一本纪念专辑.专辑邀请了我国数学界、系统科学界和自动控制界一些有名的专家学者及关先生生前好友、学生等撰稿.

专辑于1999年11月起发售,每册30.00元.欢迎单位及个人订阅.

详见《控制理论与应用》本期所附征订启事(插页).