

模糊调整在求解模糊规则中的应用*

范英俐 汪定伟

(东北大学系统工程系·沈阳, 110006)

摘要: 提出一种求解模糊线性规划的非精确算法. 它模拟人的调节过程, 将模糊控制思想嵌入到遗传算法的变异与交叉算子中求解出一个模糊最优解集, 取代了以往利用单纯形求解模糊线性规划问题的一个最优解. 实验结果表明, 算法有潜力解决实际的规划问题.

关键词: 模糊线性规划; 模糊控制; 遗传算法; 生产计划; 模糊最优

Applying Fuzzy Adjustment for Fuzzy Programming Problems

Fan Yingli and Wang Dingwei

(Department of Systems Engineering, Northeastern University, Shenyang, 110006, P. R. China)

Abstract: This paper makes a thorough investigation on inexact algorithm how to solve linear programming problem with fuzzy resources. This algorithm simulates the human decision procedure and combines fuzzy control with the mutation and crossover in genetic algorithm to find a family of inexact solutions with acceptable membership degree instead of finding an exact solution by simple method. The numerical analysis has shown its potential for industrial application.

Key words: fuzzy linear programming; fuzzy control; genetic algorithm; production planning; fuzzy optimal solution

1 引言(Introduction)

1972 年 Zadeh 教授提出模糊控制理论^[1]. 模糊控制是将精确量进行模糊化, 利用总结出的模糊控制规则进行控制, 取代了基于精确数学模型的传统控制理论^[2], 这一思想一经产生就广泛应用于各个学科^[3]. 由于多方面因素的不确定性, 生产实际中的规划问题都属于模糊规划问题的范畴. 一般的方法是将模糊线性规划问题通过隶属函数转换为参数规划, 利用单纯形方法求解出一个精确的解^[4]. 而实际上, 隶属函数所反映的问题的模糊性也是不够准确的, 往往最终求解得到的优解不能令决策者满意, 因此, 求解一组供决策者选择的非精确的解, 就显得比较有实用性. 我们提出了一种将模糊控制思想嵌入到遗传算法中的非精确算法, 从而实现模拟人的调节过程进行寻优.

2 模糊线性规划问题的描述(Fuzzy linear programming problems)

我们考虑具有模糊资源约束和目标的线性规划模型, 该问题可做如下描述:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq \tilde{b}, \quad x \geq 0, \quad A \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $c = (c_j)_{n \times 1}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 是精确的, $\tilde{b} =$

$(\tilde{b}_i)_{1 \times m}$ 是模糊数, x 是 n 维向量, 决策者期望达到的目标是模糊的, 可以用 \tilde{Z} 表示. 假设目标函数与资源约束的隶属函数是单调连续, 非减 / 非增的线性函数, 目标与第 i 个约束的容许度是 p_0 和 p_i , 预期达到的目标是 z_0 , 第 i 个约束最低水平是 b_i .

基于以上的前提假设, 目标函数与第 i 个约束的隶属函数可用下式表示:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1, & cx > z_0, \\ 1 - (z_0 - cx)/p_0, & z_0 - p_0 \leq cx \leq z_0, \\ 0, & cx < z_0 - p_0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1, & A_i x > b_i, \\ 1 - (A_i x - b_i)/p_i, & b_i \leq A_i x \leq b_i + p_i, \\ 0, & A_i x > b_i + p_i. \end{cases} \quad (3)$$

经过转换式(1)化成下式表达:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & cx \leq z_0 - (1 - \alpha)p_0, \\ & A_i x \leq b_i + (1 - \alpha)p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x \geq 0, \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

根据单纯形法求解式(4)可以得到一个优解 (x^*, α^*) , x^* 是模糊规划具有最大隶属度 α^* 的最优

* 国家自然科学基金(69684005)资助项目.

本文于 1997 年 12 月 22 日收到. 1998 年 6 月 22 日收到修改稿.

解,而这个最优解在很大程度上不能符合决策者的意愿.

模糊控制的思想就是将人的经验固化成一条条的模糊控制规则,让方法模拟人的思维过程进行调节.在规划问题上,人的寻优过程大致可以分三个步骤进行描述:首先,设定几个备选的原始方案;然后,对于每一个方案根据它与各个约束满足的符合程度来模糊调节;最后,在多个方案中择优.人在规划过程中经常使用一些模糊的词语:较大,较小等.充分研究人的寻优过程,概括起来是两种思想的结合,即多方案择优与模糊调整.我们采用将模糊控制思想嵌入到遗传算法中,实现模拟人的调节过程,将方案中使用的资源情况与约束之间的偏差,根据模糊控制规则进行量化,得出相应的操作因子,使算法依据不同方案的特点进行不同步长的调节,最终找到模糊优解,也可以通过人机交互而构造出令决策者满意的解.

3 非精确算法的理论基础(The basic idea of inexact algorithm)

定义 1 模糊规划的模糊优解可以定义成

$$\bar{s} = \{ (x, \mu_{\bar{s}}(x)) \mid x \in (\mathbb{R}^n)^+ \},$$

$$\mu_{\bar{s}}(x) = \min \{ \mu_0(x), \mu_i(x), i = 1, 2, \dots, m \},$$

$$x \in (\mathbb{R}^n)^+.$$

$(\mathbb{R}^n)^+$ 是 n 维正空间, $\mu_{\bar{s}}(x)$ 称为点 x 总隶属度.

根据模糊优解的定义,我们给定可接受的满意度 α , 求取一个关于模糊优解的 α - 截集.

定理 1 模糊规划可行解的凸组合仍为规划的可行解.

定理 1 的证明在文献[5],定理 1 是人机交互构造决策者满意解的理论基础.

定义 2 利益系数 p_{ij} : 定义为第 j 种产品消耗单位资源 i 的利益系数.

$$p_{ij} = \begin{cases} c_j/a_{ij}, & a_{ij} \neq 0, \\ +\infty, & a_{ij} = 0, \end{cases} i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n,$$

$$P = (p_{ij})_{m \times n}$$
 称为利益系数矩阵.

定义 3 动作变量阵:通过对利益系数阵每行元素从大到小排序,得到相对应变量的一个顺序矩阵,称为动作变量阵,用 D 表示. d_{ij} 称为第 i 个约束的第 j 个优先增大变量及第 $n - j + 1$ 个优先减少变量.

$$d_{ij} = [j], p_{i(1)} \geq p_{i(2)} \geq \dots \geq p_{i(n)},$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n.$$

$[j]$ 是排在第 j 位元素的下标.

4 模糊调整在模糊规划中的应用(Fuzzy adjustment applying to fuzzy programming problems)

求解模糊规划实际上化成了求解下面的式子:

$$\max \mu_{\bar{s}}(x) = \max \{ \min \{ \mu_0(x), \mu_i(x), i = 1, 2, \dots, m \} \mid x \in (\mathbb{R}^n)^+ \}. \quad (5)$$

传统方法是无法求解式(5)这种规划问题的,但是采用非精确算法是很容易求解的.这种非精确算法是采用将依据模糊控制的思想进行设计的模糊规则,应用到遗传算法的交叉与变异算子之中,遗传算法中的种群大小为 NP , x 可以作为遗传基因表达式,取模糊优解的隶属函数作符合函数,选择策略是按照符合函数的从大到小排序进行比例选择,终止准则是迭代代数 NG .

4.1 模糊规则的确立(Determined fuzzy rules)

为了针对具有不同特点的种子进行行之有效的调节方法,对遗传算法产生的初始种群,根据种子所在的不同位置将它们分类.由定义可知种子的隶属度有三种,根据各类隶属度的不同取值,将种子进行分类:

表 1 种子的特点分类表

Table 1 The table of all kind of seeds

类别	特点
第 I 类	$\mu_{\bar{s}}(x) \neq 0$
第 II 类	$\mu_0(x) = 0$ 且 $\mu_i \neq 0, \forall i$
第 III 类	$\mu_0(x) = 0$ 且 $\bigcap_{i=1}^m \mu_i = 0$
第 IV 类	$\mu_0(x) \neq 0$ 且 $\bigcap_{i=1}^m \mu_i = 0$

根据对人的经验进行总结,得出非精确算法的模糊规则:

- 1) If 第 I 类种子非空, Then 该类型种子变异,且在交叉中这类种子做为父本,其它类型种子做为母本;
- 2) Else If 第 II 类种子非空, Then 该类种子变异,且在交叉中这类种子做为父本,其它类型种子做为母本;
- 3) Else 所有种子均变异.

4.2 模糊调整在遗传算子中的应用(Fuzzy adjustment applying to genetic operators)

在规划过程中,当某一点超出约束时,应首先把浪费资源多,但带来利益很小的产品量减少,也就是说,减少该约束的第一优先减少变量,使该点满足约

束;当某一点目标值很小且有很多剩余资源,应该首先把浪费资源少,带来利益很大的产品量增加,也就是说,增加该约束的第一优先增大变量,使该点目标增加,这就是非精确算法中变异的基本思想,根据模糊规则将偏差进行模糊化,偏差 $q_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$,

$$\forall i.$$

表 2 操作因子的确定

Table 2 Operators determination

偏差 (q_i)	正大	正中	正小	零	负小	负中	负大
操作因子 (o)	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3

x^{l+1} 是 x^l 子代, 变异通过对优先变量的增加或减小来实现, 增加或减少的步长根据模糊规则来定义的, 变异通过下式实现:

$$x_j^{l+1}(k) = x_j^l(k) + \lambda_j t, \\ j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, NP1. \quad (6)$$

其中

$$\lambda_j = \begin{cases} 1, & x_j^l(k) \text{ 是优先变量,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

l 是指迭代的代数, t 是指根据操作因子决定的步长, $NP1$ 为需要变异种子的个数.

$$t = \text{sgn}(o) \times a^{|\text{sgn}(o)|}, \\ \text{sgn}(o) = \begin{cases} -1, & o < 0, \\ 1, & o \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

式中的 a 为步长系数.

在非精确算法之中, 交叉是在不同类型的种子之间进行的, 利用模糊规则确定父本的交叉系数, 交叉通过下式实现:

$$x^{l+1}(k) = \alpha \times fx^l(k) + \beta \times mx^l(k), \\ \alpha, \beta \in [0, 1]. \quad (8)$$

α 为父本交叉系数, β 为母本交叉系数, $fx(k)$, $mx(k)$ 分别是父本与母本, 具体的交叉系数是根据父本与母本的不同类型来确定的.

4.3 人机交互过程(Human-computer interaction)

在实际的目标/资源问题中, 决策者可能会随时关心不同的产品产量, 或某种资源的使用情况, 譬如: 某种产品近期走俏, 决策者会希望这种产品的产量尽量多; 有时某种资源目前紧缺, 决策者希望这种资源尽量少使用. 这时的决策者只对某几种产品和某几个资源特别关心, 为了能使决策者对求得的解更满意, 针对这类情况, 提供人机交互过程, 可以由决策者提出所关心的产品以及约束, 最终选择优解.

人机交互界面会询问决策者可接受的模糊优解的满意度 α , 以及决策者关心的变量和约束, 最后, 算法通过计算得出关心的变量和约束的最大/最小的模糊优解. 决策者可以根据自己的要求选择优解或者通过各优解的凸组合组成一个优解, 构造优解采用下式:

$$z = \gamma \times z1 + \omega \times z2, \gamma + \omega = 1,$$

式中的 z 为构造优解, $z1, z2$ 为决策者关心的两个方面的解.

5 数据结果及分析(Numerical result and analysis)

本算法是用 FORTRAN 语言实现的. 算法可以在无需等待的情况下计算出 10×6 维问题, 由于篇幅的关系, 现给出一个 4×2 维的例子进行说明:

例 $Z_0 = 130, P_0 = 30.17, P_1 = 3, P_2 = 20,$

$$\max 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

s.t. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15,$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

利用单纯形法求解得到的模糊优解为 $S = (8.0106, 0, 8.8116, 0, 0.3926)$, 目标值为 111.3469. 假定可接受的满意度为 0.1, 关心的约束为第一个, 关心的变量为第二个, 通过算法得到的一组解如下表.

表 3 可供选择的模糊优解

Table 3 The preferred solutions for selection

	x	目标值	满意度
隶属度最大	(0.865, 10.302, 5.242, 0.568)	108.386	0.296
关心约束最小	(0, 7.725, 7.137, 0)	102.862	0.116
关心约束最大	(2.039, 10.391, 5.214, 0)	107.039	0.118
关心变量最小	(10.229, 1.941, 0.585, 4.461)	104.956	0.185
关心变量最大	(0, 11.065, 5.372, 0)	103.668	0.143

由算法得到了一组解, 决策者可以根据自己的意愿选择某个解, 也可以组合一个符合决策者意愿的优解, 如果仅按照隶属度最大, 算法得到的解与单纯形法得到的解的目标值相比误差只有 2%.

6 结束语(Conclusion)

利用模糊控制的非精确算法求解模糊线性规划问题, 可以求解出令决策者比较满意的模糊优解, 弥补了用单纯形法求解时由于隶属函数不够确切带来的唯一精确解的不满意. 但是, 目前该算法仍有不足之处, 当规划维数很大时, 而需要加大种群的规模或

(下转第 724 页)

- 3 Milanese M and Vicino A. Estimation Theory for nonlinear models and membership uncertainty. *Automatica*, 1991, 27(2): 403 - 408
- 4 Jaulin L and Walter E. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded error estimation. *Automatica*, 1993, 29(7): 1053 - 1064
- 5 Milanese M, Belforte G. Estimation theory and uncertainty intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors; linear families of models and estimators. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1982, 27(2): 408 - 414

(上接第 720 页)

提高迭代代数, 因此计算时间较长, 我们将在以后的工作中逐步改进.

参考文献 (References)

- 1 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.*, 1973, 3(1): 28 - 44
- 2 吴望名等. 应用模糊集方法. 北京: 北京师范大学出版社, 1985, 237 - 269
- 3 周景振, 韩普晋. 日本模糊控制理论与研究的进展. *控制理论与应用*, 1997, 14(4): 453 - 458
- 4 Lai Y J and Hwang C L. *Fuzzy Mathematical Programming*. Berlin: Springer-Verlag, 1992
- 5 Wang Dingwei, Fang S C. A genetic-based approach for aggregated pro-

本文作者简介

王文正 1968年生. 1996年西北工业大学航天工程学院博士毕业. 1996年至1998年在西安交通大学自动控制流动站做博士后研究工作. 现为中国空气动力研究与发展中心副研究员. 主要从事系统辨识, 飞行控制等方面的研究.

蔡金狮 1935年生. 1956年北京大学数学系毕业. 现为中国空气动力研究与发展中心研究员, 哈尔滨工业大学、厦门大学、西北工业大学兼职教授. 主要从事飞行器系统辨识, 飞行力学等方面的研究.

duction planning in a fuzzy environment. *IEEE Trans. Syst., Man, and Cybern.*, 1997, 27(5): 636 - 645

本文作者简介

范英刚 1973年3月生. 1994年毕业于东北大学自动控制系, 1997年3月获得东北大学系统工程专业的工学硕士学位. 现在是东北大学系统工程博士. 主要研究的方向: 模糊控制, 智能算法, 模糊规划.

汪定伟 1948年11月生. 东北大学博士, 曾在美国北卡罗来拉州立大学做博士后研究. 现为东北大学教授, 博士生导师. 中国自动化学会管理与系统专业委员会委员, 《控制与决策》杂志编委, 国家863计划 CIMS 主题 09 专题专家. 主要研究方向: 生产计划与调度理论, 建模与优化, 智能优化方法. 已出版著译 4 本, 在国内、外杂志发表 70 余篇论文.