第 16 卷第 5 期
1999 年 10 月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.16, No.5
Oct., 1999

线性时滞不确定系统的稳定性分析*

陈东彦　徐世杰　邵成勋
(哈尔滨工业大学航天工程与力学系·哈尔滨,150001)

摘要: 讨论了带有拓扑型结构不确定性的线性时滞系统,利用 Lyapunov 函数和矩阵的高斯分解,给出使其渐近稳定的充分条件,并且通过实例说明了所给条件的保守性比用"秩 1 分解"方法处理时小.

关键词: 线性时滞系统; 拓扑型结构不确定性; 高斯分解; 鲁棒稳定性

The Analysis of Stability for Linear Delay Uncertain Systems

Chen Dongyan,　Xu Shijie　and　Shao Chengxun
(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology·Harbin, 150001, P. R. China)

Abstract: In this paper, the linear delay system with topological type structured uncertainty is discussed. Applying Lyapunov function and Gaussian decomposition of matrix, we present the sufficient condition for asymptotic stability of the system. By an example, we show that the conservatism of our conditions is less than that given by "rank-1" decomposition method.

Key words: linear delay systems; topology type structured uncertainty; Gaussian decomposition; robust stability

1　引言(Introduction)

对于线性不确定系统 $\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)$ 的稳定性研究,自 80 年代以来得到了充分的讨论,并且获得了许多好的结果.有代表性的是 Patel et al[1]、Yedavalli[2]和 Zhou, K. et al[3]等.他们应用 Lyapunov 函数,分别针对不确定部分 ΔA 在非结构限制($\|\Delta A\|<\delta,\delta>0$)、结构限制($|\Delta|\leqslant D$, D 已知)、拓扑型结构限制($\Delta A=\sum\limits_{i=1}^{m}r_iE_i$, E_i 已知, r_i 未知)及广义匹配条件限制($\Delta A=FDE$, F 和 E 已知, D 未知)等四种情况下,给出了系统渐近稳定的充分条件.

对于线性时滞不确定系统 $\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-\tau)+(B+\Delta B)u(t)$ 的鲁棒性研究,也得到了广泛的讨论.文章[4~14]详细讨论了系统的不确定部分在以上各种限制下的鲁棒性分析和鲁棒控制器设计.

在上述讨论中,大多是应用 Lyapunov 函数给出相应问题的充分条件.特别是在[8~10]中,采用了矩阵的"秩 1 分解"来处理不确定部分的结构矩阵 $E_i(i=1,2,\cdots,m)$,解决了不确定参数 $r_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的估计问题.但是,当 E_i 不是"秩 1"矩阵时,虽然 ΔA 也能人为地分解成"秩 1"矩阵的线性组合,但是这既增加了计算量,其效果又不很好.因此,本文主要讨论这种带有拓扑型结构限制的线性时滞不确定系统,给出其渐近稳定的充分条件.

考虑线性时滞不确定系统

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+(A_1+\Delta A_1)x(t-\tau). \tag{1}$$

其中 $A,A_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是已知常值矩阵, $\Delta A,\Delta A_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 是不确定矩阵, $\tau>0$ 是时滞.设

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{m}r_iE_i,\ \Delta A_1=\sum_{j=1}^{l}s_jF_j. \tag{2}$$

这里 $E_i,F_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 均是已知常值矩阵, r_i,s_j 是未知参数,但满足条件

$$|r_i|\leqslant r\ (i=1,2,\cdots,m),\quad |s_j|\leqslant s\ (j=1,2,\cdots,l), \tag{3}$$

且 $\mathrm{rank}(E_i)=n_i$, $\mathrm{rank}(F_j)=\bar{n}_j$.

由矩阵的高斯分解知,存在 $H_i,G_i^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n_i}$ 及 $V_j,W_j^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times\bar{n}_j}$,满足: $\mathrm{rank}(H_i)=\mathrm{rank}(G_i)=n_i$, $E_i=H_iG_i$; $\mathrm{rank}(V_j)=\mathrm{rank}(W_j)=\bar{n}_j$, $F_j=V_jW_j$. 于是有

$$\Delta A=\sum_{i=1}^{m}r_iE_i=\sum_{i=1}^{m}r_iH_iG_i,\quad \Delta A_1=\sum_{j=1}^{l}s_jF_j=\sum_{j=1}^{l}s_jV_jW_j. \tag{4}$$

又设系统(1)的名义系统为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-\tau). \tag{5}$$

引理 1[5]　名义系统(5)是渐近稳定的,如果存在正定矩阵 $P,Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$,使得

---

* 国家自然科学基金(NO.19782002)资助项目.
本文于 1998 年 3 月 30 日收到. 1998 年 10 月 12 日收到修改稿.

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + PA_1Q^{-1}A_1^{\mathrm{T}}P + Q < 0. \quad (6)$$

由此可见名义系统(5)是渐近稳定的充分条件是：存在正定矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$，使得

$$Y = \begin{bmatrix} -A^{\mathrm{T}}P - PA - Q & -PA_1 \\ -A_1^{\mathrm{T}}P & Q \end{bmatrix} > 0. \quad (7)$$

因为由矩阵理论知：$Y > 0 \Longleftrightarrow Q > 0, A^{\mathrm{T}}P + PA + PA_1Q^{-1}A_1^{\mathrm{T}}P + Q < 0$.

2 主要结果(Main results)

我们的目的是在已知系统(1)的名义系统(5)渐近稳定的情况下，寻求上界 r 与 s，使得系统(1)对所有满足式(3)的 r_i 与 s_j 都保持渐近稳定性.

定理 1 假设名义系统(5)渐近稳定.如果存在正定矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足式(6)，且使得

$$Q - s\bar{W} > 0, \quad (8.1)$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P[r\bar{H} + s\bar{V} + A_1(Q - s\bar{W})^{-1}A_1^{\mathrm{T}}]P + Q + r\bar{G} < 0 \quad (8.2)$$

成立，则系统(1)~(3)渐近稳定.其中

$$\bar{H} = \sum_{i=1}^{m} H_iH_i^{\mathrm{T}},\ \bar{G} = \sum_{i=1}^{m} G_i^{\mathrm{T}}G_i,$$

$$\bar{V} = \sum_{j=1}^{l} V_jV_j^{\mathrm{T}},\ \bar{W} = \sum_{j=1}^{l} W_j^{\mathrm{T}}W_j.$$

证 设 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件(6)，令

$$V(t) = x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^{t} x^{\mathrm{T}}(\alpha)Qx(\alpha)\mathrm{d}\alpha,$$

则 $V(t)$ 是正定函数.下面只须证明系统(1)有 $\dot{V}(t) < 0$ 即可.事实上，易于推得

$$\dot{V}(t) = -z^{\mathrm{T}}(t)Yz(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta Ax(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta A_1x(t-\tau), \quad (9)$$

这里 $z^{\mathrm{T}}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau)]$. 由于

$$\begin{aligned} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta Ax(t) &= 2x^{\mathrm{T}}(t)P\sum_{i=1}^{m} r_iH_iG_ix(t) \leqslant \\ & x^{\mathrm{T}}(t)P\sum_{i=1}^{m} rH_iH_i^{\mathrm{T}}Px(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}(t)\sum_{i=1}^{m} rG_i^{\mathrm{T}}G_ix(t) = \\ & x^{\mathrm{T}}(t)(rP\bar{H}P + r\bar{G})x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^{\mathrm{T}}(t)P\Delta A_1x(t-\tau) &= 2x^{\mathrm{T}}(t)P\sum_{j=1}^{l} s_jV_jW_jx(t-\tau) \leqslant \\ & x^{\mathrm{T}}(t)P\sum_{j=1}^{l} sV_jV_j^{\mathrm{T}}Px(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}(t-\tau)\sum_{j=1}^{l} sW_j^{\mathrm{T}}W_jx(t-\tau) = \\ & x^{\mathrm{T}}(t)sP\bar{V}Px(t) + \\ & x^{\mathrm{T}}(t-\tau)s\bar{W}x(t-\tau), \end{aligned}$$

将它们代入式(9)，得

$$\dot{V}(t) \leqslant -z^{\mathrm{T}}(t)\left\{Y - \begin{bmatrix} P(r\bar{H} + s\bar{V})P + r\bar{G} & 0 \\ 0 & s\bar{W} \end{bmatrix}\right\}z(t).$$

从而当条件(8.1),(8.2)成立时，有

$$Y - \begin{bmatrix} P(r\bar{H} + s\bar{V})P + r\bar{G} & 0 \\ 0 & s\bar{W} \end{bmatrix} > 0,$$

故 $\dot{V}(t) < 0$. 定理得证.

推论 1 假设名义系统(5)渐近稳定.如果存在 $P > 0, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(r\bar{H} + s\bar{V} + A_1A_1^{\mathrm{T}})P + I_n + r\bar{G} + s\bar{W} < 0, \quad (10)$$

则系统(1)~(3)渐近稳定.

再返回来观察式(4).如果记 $H = [H_1, H_2, \cdots, H_m]$, $G^{\mathrm{T}} = [G_1^{\mathrm{T}}, G_2^{\mathrm{T}}, \cdots, G_m^{\mathrm{T}}]$, $V = [V_1, V_2, \cdots, V_l]$, $W^{\mathrm{T}} = [W_1^{\mathrm{T}}, W_2^{\mathrm{T}}, \cdots, W_l^{\mathrm{T}}]$, 及 $\Gamma = \mathrm{diag}\{r_1I_{n_1} \ \cdots \ r_mI_{n_m}\}$, $\Lambda = \mathrm{diag}\{s_1I_{\bar{n}_1} \ \cdots \ s_lI_{\bar{n}_l}\}$, 则 $H, G^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $V, W^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times \bar{N}}$, $\Gamma \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{\bar{N}\times \bar{N}}$. 其中 $N = \sum_{i=1}^{m} n_i, \bar{N} = \sum_{j=1}^{l} \bar{n}_j$. 于是有

$$\Delta A = H\Gamma G, \Delta A_1 = V\Lambda W. \quad (11)$$

这样我们把不确定参数分别集中于准对角矩阵 Γ 和 Λ 中，形式上规范且便于处理.

定理 2 假设名义系统(5)渐近稳定.如果存在正定矩阵 $P, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足式(6)，且使得

$$Q - W^{\mathrm{T}}W > 0, \quad (12.1)$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(r^2HH^{\mathrm{T}} + s^2VV^{\mathrm{T}} + A_1(Q - W^{\mathrm{T}}W)^{-1}A_1^{\mathrm{T}})P + Q + G^{\mathrm{T}}G < 0 \quad (12.2)$$

成立，则系统(1)~(3)渐近稳定.

推论 2 在定理2的假设下，如果存在 $P > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足条件

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(r^2HH^{\mathrm{T}} + s^2VV^{\mathrm{T}} + A_1A_1^{\mathrm{T}})P + I_n + W^{\mathrm{T}}W + G^{\mathrm{T}}G < 0, \quad (13)$$

则系统(1)~(3)渐近稳定.

3 一个算例(An example)

考虑系统(1).设其中 $x(t) \in \mathbb{R}^2, \tau > 0$, 且

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & r_2 \\ r_1 & r_1 + r_2 \end{bmatrix},\ \Delta A_1 = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 + s_2 \\ s_1 + s_2 & s_2 \end{bmatrix},$$

$|r_i| \leqslant r, (i = 1,2)$, $|s_j| \leqslant s, (j = 1,2)$.

可知,相应于式(2),有

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

首先按照引理1,存在 $P = Q = I_2$ 使得条件(6)成立.其次,对于 E_1, E_2 及 F_1, F_2 存在一种高斯分解,即 $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, V_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, W_1 = W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,使得

$$Q - s\bar{W} = (1 - 2s)I_2,$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(r\bar{H} + s\bar{V} + A_1(Q - s\bar{W})^{-1}A_1^{\mathrm{T}})P + Q + r\bar{G} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 + 6r + 3s + \dfrac{1}{1 - 2s} & 2r + 2s \\ 2r + 2s & -3 + 4r + 3s + \dfrac{1}{1 - 2s} \end{bmatrix}.$$

最后,由条件(8.1),(8.2)式可给出如下计算结果:

表 1 不确定参数 r 与 s 的取值范围

Table 1 The value ranges for uncertain parameters r and s

r 取值	s 可取值范围	s 取值	r 可取值范围
0	[0,0.2607]	0	[0,0.4000]
0.1	[0,0.2154]	0.1	[0,0.2845]
0.2	[0,0.1568]	0.2	[0,0.1280]

然而,若按"秩1分解"有

$$Q - s\bar{W} = (1 - 2s)I_2,$$

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + P(r\bar{H} + s\bar{V} + A_1(Q - s\bar{W})^{-1}A_1^{\mathrm{T}})P + Q + r\bar{G} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 + 5r + 3s + \dfrac{1}{1 - 2s} & 2r + 2s \\ 2r + 2s & -3 + 5r + 3s + \dfrac{1}{1 - 2s} \end{bmatrix}.$$

算得结果为:

表 2 不确定参数 r 与 s 的取值范围

Table 2 The value ranges for uncertain parameters r and s

r 取值	s 可取值范围	s 取值	r 可取值范围
0	[0,0.2607]	0	[0,0.3548]
0.1	[0,0.2069]	0.1	[0,0.2467]
0.2	[0,0.1376]	0.2	[0,0.1112]

比较表1与表2,可见表1结果好于表2,此例说明,当不确定部分的拓扑型结构矩阵的秩大于1时,用高斯分解处理比用"秩1分解"效果更好.

4 结论(Conclusion)

本文借助于Lyapunov函数和矩阵的高斯分解,给出了线性时滞不确定系统渐近稳定的充分条件,通过所给结果可以求出相应系统渐近稳定的条件,或者判断相应系统是否是渐近稳定的.最后利用一个算例验证了所得结论.

参考文献(References)

1 Patel R V and Toda M. Quantitative measure of robustness for multivariable systems. In: Proc. Joint Automat. Contr. Conf., San Francisco, 1980, Paper TP8 – A

2 Yedavalli R K. Improved measures of stability robustness for linear state space models. IEEE Trans. Automat. Contr., 1985, 30(2): 557 – 579

3 Zhou K and Khargonekar P P. Stability robustness bounds for linear state space models with structured uncertainty. IEEE Trans. Automat. Contr., 1987, 32(7): 621 – 623

4 Su T J, Fong I K, Kuo T S and Sun Y Y. Robust stability for linear time-delay systems with linear parameter perturbations. Int. J. Systems Science, 1988, 19(10): 2123 – 2129

5 Su T J and Huang C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1992, 37(10): 1656 – 1659

6 田连江,高为炳,程勉.时滞不确定系统的鲁棒分析.自动化学报,1994,20(5):584 – 588

7 Yu W, Sobel K M and Shapino E Y. A time domain approach to the robustness of time delay systems. Proceedings of the 31st Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, 1992, 3726 – 3727

8 Shen J C, Chen B S and Kung F C. Memoryless stability of uncertain dynamic delay systems: Riccati equation approach. IEEE Trans. Automat. Contr., 1991, 36(5): 638 – 640

9 田连江,高为炳,程勉.线性时滞不确定系统的鲁棒性研究.控制理论与应用,1993,16(6):718 – 723

10 Cheres E, Gutman S and Palmor Z J. Stabilization of uncertain dynamic systems including state delay. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34(11): 1199 – 1203

11 Mahmoud M S and Al-Muthairi N F. Design of robust controllers for time-delay systems. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(5): 995 – 999

12 Niculescu S I, Dion J M and Dugard L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. Lake Buena Vista, 1991, 431 – 432

13 褚健,林南春,胡协和,王骥程.多重状态滞后系统的鲁棒控制器设计.浙江大学学报,1994,28(2):194 – 201

14 曹登庆.不确定变时滞线性系统的镇定条件.控制理论与应用,1997,14(1):85 – 89

(下转第760页)

列的速度；4）采用从模型取状态，增强了系统抗噪声干扰的能力.

参考文献(References)

1 古德温 G C,孙贵生著,张永光等译.自适应滤波、预测与控制.北京:科学出版社,1992

2 路正午,吴士昌.一种简便的从模型取状态 MRAC 系统离散方案.控制与决策,1993,8(1):57-60

3 初振友,吴士昌.从模型取状态的离散自适应控制系统设计及应用.控制与决策,1989,4(3):12-17

4 吴士昌,臧瀛芝.一种从模型取状态的 MRAC 系统设计方法改进.控制与决策,1988,3(2):45-47

5 吴士昌等.对象具有纯滞后的离散 MRACS 设计方法.东北重型机械学院学报,1989,13(2):54-60

6 李清泉.自适应控制系统理论、设计及应用.北京:科学出版社,1990,214-218

本文作者简介

方一鸣 1965年生.燕山大学自动化系副教授.研究方向为自适应控制,变结构控制,计算机控制.

焦晓红 女.1966年生.硕士.燕山大学自动化系副教授.主要从事自适应控制,变结构控制等研究.

吴士昌 1936年生.燕山大学自动化系教授.主要研究方向为自适应控制,智能控制.

王硕玉 1962年生.1983年和1986年分别获沈阳工业大学机电系学士和硕士学位,1993年获日本北海道大学博士学位.现为日本高知工科大学博士生导师.主要从事机器人智能控制,自适应控制等的研究.

(上接第756页)

15 Verriest E I,Fan M K H and Kullstam J.Frequency domain robust stability criteria for linear delay systems.Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control.San Antonlo:Texss,1993,3473-3478

本文作者简介

陈东彦 1964年生.1985年毕业于东北师范大学数学系,1988年于吉林工业大学应用数学系获硕士学位.现在为哈尔滨工业大学航天工程与力学系在读博士.研究方向为时滞不确定系统的鲁棒稳定性分析和鲁棒控制器设计.

徐世杰 1951年生.1983年于哈尔滨工业大学飞行力学专业获得硕士学位,1995年9月于法国南锡第一大学自动化专业获得博士学位.现为哈尔滨工业大学航天学院航天工程与力学系教授、博士生导师.主要研究方向为飞行力学与控制,机器人动力学与控制.

邵成勋 1932年生.1955年毕业于北京航空航天大学.现为哈尔滨工业大学航天学院航天工程与力学系教授、博士生导师.主要研究方向为航天器动力学与控制.