

# 灵敏度函数恢复的非奇异 $H_\infty$ 方法

席斌

吴铁军

(厦门大学自动化系·厦门, 361005) (浙江大学工业控制国家重点实验室·杭州, 310027)

**摘要:** 在控制器设计的 LTR 方法中, 说明在  $H_\infty$  范数意义下的灵敏度函数恢复与回路传递函数的恢复是不等价的, 但灵敏度函数的恢复更适合鲁棒控制问题. 通过把灵敏度函数恢复误差变换成控制器的线性分式变换式, 得到一个非奇异结构的广义调节器问题, 于是可利用标准的  $H_\infty$  输出反馈控制器设计方法求解. 该控制器在保证灵敏度函数误差的  $H_\infty$  范数小于某一正数的同时可使闭环系统内稳定.

**关键词:** 恢复; 灵敏度; 广义调节器; 非奇异  $H_\infty$  方法

## Sensitivity Recovery with Nonsingular $H_\infty$ Method

Xi Bin

(Department of Automation, Xiamen University · Xiamen, 361005, P. R. China)

Wu Tiejun

(National Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University · Hangzhou, 310027, P. R. China)

**Abstract:** In the design procedure for LTR based controller, there is difference between sensitivity recovery and loop transfer recovery in the sense of  $H_\infty$  norm. By formulating the recovery error of sensitivity function as a linear fraction transformation of controller, we can solve a generalized regulator problem with nonsingular structure which can be solved with Matlab toolbox. The controller we get from toolbox makes the  $H_\infty$  norm of recovery error of sensitivity function no more than a prescribed level and internally stabilize the system. The validity of the conclusions is verified in a design case of a two order system.

**Key words:** recovery; sensitivity; generalized regulator; nonsingular  $H_\infty$  method

### 1 引言 (Introduction)

回路传递函数恢复 (Loop Transfer Recovery) 是由 Doyle 和 Stein<sup>[1]</sup> 针对 LQG 理论中的 Kalman 滤波器的应用会破坏系统的鲁棒性而提出的. 设所研究的线性时不变系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du. \end{cases} \quad (1)$$

众所周知 LQG 理论的控制器设计分两步进行, 首先设计状态反馈增益矩阵  $K$ , 如图 1(a) 所示, 然后再设计 Kalman 滤波器  $F(s)$  以实现状态的重构,

并和  $K$  组成输出反馈控制器  $Q(s)$ , 如图 1(b) 所示.

若从对象的输入点断开回路, 可得图 1(a) 的回路传递函数为  $L_a = K(sI - A)^{-1}B$ , 图 1(b) 的回路传递函数为  $L_b = Q(s)(D + C(sI - A)^{-1}B)$ , 两者一般并不相等, 由此造成基于滤波器或状态观测器的控制器使系统失去状态反馈所具有的良好品质, 包括鲁棒性.

因此早期 LTR 研究的是如何设计观测器增益矩阵以使  $L_a = L_b$ , 称之为精确恢复. 然而研究结果表明精确恢复的条件一般不能满足, 即使满足也需

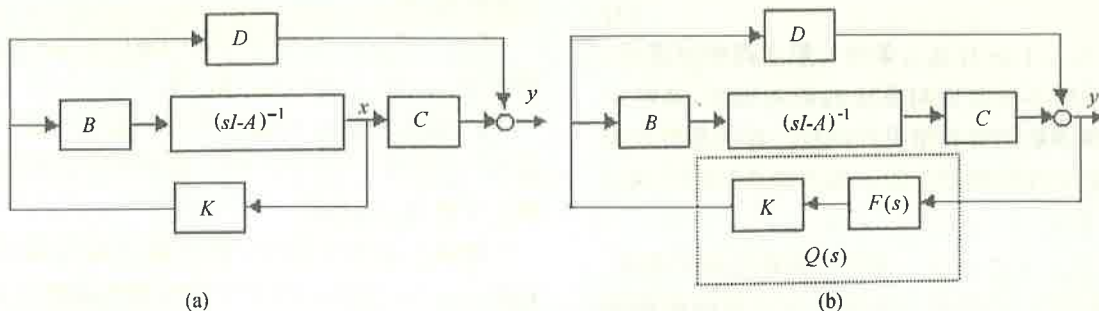


图 1 状态反馈与输出反馈结构

Fig. 1 The structure of state feedback and output feedback

要高增益矩阵来实现.因此更具有实际意义的目标是使回路传递函数的误差  $L_a - L_b$  在某种范数的度量下较小.若采用  $H_\infty$  范数,则在优化  $\|L_a - L_b\|_\infty$  范数的同时必须兼顾闭环系统的稳定性,为克服这一困难,本文研究的是灵敏度函数恢复的非奇异  $H_\infty$  方法,首先说明的是灵敏度函数恢复与回路传递函数恢复在  $H_\infty$  范数意义下的不等价,然后采用线性分式变换的方法把问题转化成广义调节器问题,而且避免了奇异结构的出现,这使得现有的鲁棒工具软件即可用于 LTR 的设计,最后是一个计算示例.在下文中  $\bar{\sigma}$  和  $\underline{\sigma}$  分别代表矩阵的最大和最小奇异值.

## 2 灵敏度函数恢复与回路传递函数的恢复 (The recovery of sensitivity function and the recovery of loop transfer function)

我们知道灵敏度函数与回路传递函数的关系为  $S_{a(b)} = (I - L_{a(b)})^{-1}$ ,  $S_a$  称为是由  $L_a$  构成的目标灵敏度函数,  $S_b$  则是由  $L_b$  构成的实际灵敏度函数.因此在精确恢复的意义下灵敏度函数恢复与回路传递函数恢复等价. Moore<sup>[2]</sup> 是首先利用这一点把 LTR 转变成灵敏度函数恢复的,这一转变带来两个好处,第一是通过控制器的互质分解使得灵敏度函数恢复问题成为典型的模型匹配问题,可以用频域  $H_\infty$  理论来解;第二是保证闭环系统的内稳定.因此由回路传递函数恢复转到灵敏度函数的恢复似乎主要是出于数学方面的考虑.其后 Stoustrup<sup>[3]</sup> 用状态方程解这一问题时,不可避免地出现了奇异问题,需要用最大能控子空间等几何方法,设计过程较为复杂.事实上灵敏度函数误差与回路传递函数误差在  $H_\infty$  范数意义下并不等价,我们可推出

$$L_a - L_b = (I - L_a)(S_b - S_a)(I - L_b), \quad (2)$$

所以

$$\|L_a - L_b\|_\infty \leq \|I - L_a\|_\infty \|S_b - S_a\|_\infty \|I - L_b\|_\infty. \quad (3)$$

若  $\bar{\sigma}(L_{a(b)}) \ll 1$  (这一条件一般在高频时满足,因为在高频段不确定性对系统的影响加强,这时应把回路传递函数的奇异值设计的较小以使系统有较好的鲁棒稳定性和对测量噪声的不敏感),则  $\|S_b - S_a\|_\infty < \gamma \Rightarrow \|L_a - L_b\|_\infty < \gamma$ .

若  $\bar{\sigma}(L_{a(b)}) \gg 1$  (这一条件一般在低频时满足,因为在低频段时系统的不确定性对系统的影响较小,这时可把回路传递函数的奇异值设计的较大以使系统有较好的跟踪和扰动抑制性能),则  $\|S_b -$

$$S_a\|_\infty < \gamma \Rightarrow \frac{1}{\underline{\sigma}(L_a)\underline{\sigma}(L_b)} \|L_a - L_b\|_\infty < \gamma.$$

由此可见灵敏度函数的恢复和回路传递函数的恢复并不等价,然而在鲁棒控制理论中,系统的许多性能指标都可以用灵敏度函数奇异值的频率特性来表示,因此灵敏度函数的恢复更具有实际意义.

## 3 灵敏度函数恢复的非奇异 $H_\infty$ 方法 (The nonsingular $H_\infty$ recovery of sensitivity function)

灵敏度函数恢复的奇异性源于预先假定控制器结构为增广的观测器型,因此为解决这一问题,在本文中我们不预先假定控制器  $Q(s)$  的结构,只要求控制器能实现: i) 闭环系统是内稳定的,从图 1(b) 看即使  $D + C(sI - A)^{-1}B$  内稳定; ii)  $\|S_a - S_b\|_\infty < \gamma$ .

在鲁棒控制理论中,一大类控制问题都可以变成广义调节器问题来解,我们试图把灵敏度函数的恢复问题也转变成这种形式,首先给出  $H_\infty$  广义调节器的结构如图 2 所示:

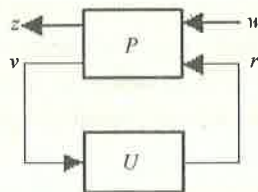


图 2 广义调节器结构  
Fig. 2 The structure of generalized regulator

其中  $[z^T \ v^T]^T = P[w^T \ r^T]^T$ ,  $P$  的状态方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2r, \\ z = C_1x + D_{11}w + D_{12}r, \\ v = C_2x + D_{21}w + D_{22}r. \end{cases} \quad (4)$$

$U(s)$  是输出反馈控制器,  $r = U(s)v$ . 对这一调节器结构我们采用以下两个结论<sup>[4,5]</sup>:

a) 从  $w$  到  $z$  的闭环传递函数是  $U(s)$  的线性分式变换式,即

$$T_{zw} = P_{11} + P_{12}U(s)(I - P_{22}U(s))^{-1}P_{21}.$$

其中  $P_{ij} = D_{ij} + C_i(sI - A)^{-1}B_j$ .

b) 用两 Riccati 方程法可判定是否存在一控制器  $U(s)$  使得  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ , 且闭环系统内稳定,这等价于使  $P_{22}$  内稳定.

根据上述两个结论,我们通过矩阵等式  $(I + XY)^{-1} = I - X(I + YX)^{-1}Y$  对灵敏度函数误差进行变换得

$$S_a - S_b =$$

$$(I - K(sI - A)^{-1}B)^{-1} - (I - Q(s)(D + C(sI - A)^{-1}B))^{-1} = K(sI - A - BK)^{-1}B - Q(s)(I - (D + C(sI - A)^{-1}B)Q(s))^{-1}(D + C(sI - A)^{-1}B).$$

这是一个关于控制器  $Q(s)$  的线性分式变换式,和广义调节器问题相比较有

$$P_{11} = K(sI - A - BK)^{-1}B, P_{12} = -I,$$

$$P_{21} = P_{22} = D + C(sI - A)^{-1}B.$$

等价的状态方程形式为:

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \begin{bmatrix} A + BK & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} x_p + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u, \\ z = [K \ 0] x_p - Iu, \\ y = [0 \ C] x_p + Dw + Du, \\ u = Q(s)y. \end{cases} \quad (5)$$

显然这是一个非奇异  $H_\infty$  输出反馈问题,从  $w$  到  $z$  的闭环传递函数恰恰是灵敏度函数误差,利用两 Riccati 方程的解法即可确定是否存在控制器  $Q(s)$  使

得  $\|S_a - S_b\|_\infty < \gamma$ ,同时使得闭环系统内稳定,即使得  $P_{22}$  内稳定.若存在这样的控制器  $Q(s)$ ,则设计目标 i)和 ii)满足.

现对一二阶系统进行计算,该系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = [2 \ 1] x + u. \end{cases}$$

已知状态反馈阵  $K = [50 \ 10]$ ,按已给的参数组成广义系统(5),取  $\gamma = 0.02$ ,利用 Matlab 鲁棒工具中的标准函数得到一个控制器  $Q(s)$  为

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y, \\ u = [-50 \ -10 \ 0 \ 0] x_c. \end{cases}$$

图 3 分别是目标灵敏度函数、实际灵敏度函数的奇异值频率特性图.

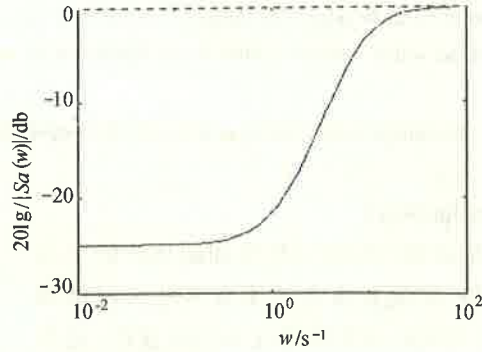
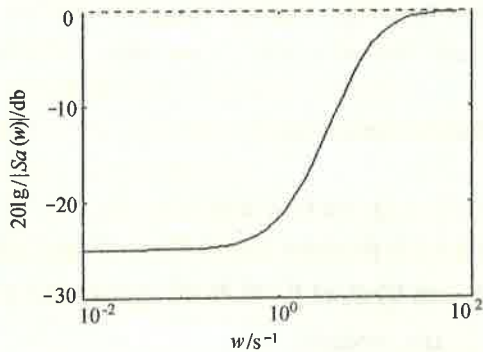


图 3 灵敏度函数的奇异值频率特性图

Fig. 3 The plot of singular value frequency character of sensitivity function

由仿真结果可见,实际系统的灵敏度函数频率特性可以较好地与目标灵敏度函数相接近,从而验证本文所示方法的可行性.

参考文献 (References)

- 1 Doyle J C and Stein G. Robust with observers. IEEE Trans. Automat. Contr., 1979, 24(6): 607 - 611
- 2 Moor J B and Tay T T. Loop recovery via  $H_2/H_\infty$  sensitivity recovery. Int. J. Control, 1989, 48(4): 1249 - 1271
- 3 Stoustrup J and Nienman H H. State-space solutions to the  $H_\infty$ /LTR de-

- sign problem. Int. J. Robust and Nonlinear Control, 1993, 3: 1 - 45
- 4 Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P and Francis B A. State space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problem. IEEE Trans. Automat. Contr., 1989, 34(8): 831 - 847
- 5 Francis B A. A Course in  $H_\infty$  Control Theory. New York: Springer-Verlag, 1987

本文作者简介

席斌 见本刊 1999 年第 2 期第 278 页.

吴铁军 1950 年出生于浙江杭州市. 1988 年获浙江大学工业自动化专业博士学位. 现为该校控制系教授, 博士生导师, 工业控制技术国家重点实验室副主任, 中国自动化学会智能自动化委员会委员.