模糊集隶属函数的扩展 *

杨 苹
(华南理工大学电力学院 · 广州，510640)
张 昊
(广东省科学院自动化工程研制中心 · 广州，510070)
吴 捷
(华南理工大学电力学院 · 广州，510640)

摘要：本文定义了集合的扩展特征函数和模糊集合的扩展隶属函数，以此来描述事物内部互相对立的两个方面．模糊集隶属函数的概念是模糊系统的理论创立与发展的基础，本文提出将模糊集隶属函数的值域由 [0,1] 区间扩展为 $[-1,1]$ 区间的思想，并研究了隶属函数扩展后的相关概念及扩展隶属函数的设置方法．将扩展隶属函数应用于模糊故障诊断的实例表明，这一新概念对于解决实际问题是有效的，其结果明显优于采用常规隶属函数的结果．

关键词：扩展；集合；模糊集；特征函数；隶属函数；模糊综合评判；故障诊断

Expanded Membership Function and Its Applications in Fault Diagnosis

Yang Ping
(Electric Power College, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)
Zhang Hao
(Automation Engineering Center, Guangdong Academy of Sciences · Guangzhou, 510640, P. R. China)
Wu Jie
(Electric Power College, South China University of Technology · Guangzhou, 510640, P. R. China)

Abstract: Two definitions of expanded characterization function and expanded membership function are given out in this paper to describe two opposite sides in an object. Especially, we give the way of establishing the expanded membership functions of fuzzy sets. The application examples of expanded membership function in fuzzy fault diagnosis prove that the original idea is effective in solving practical problems, and the results are better than that of applying conventional fuzzy membership function.

Key words: set; characterization function; fuzzy set; membership function; expand; fuzzy comprehensive evaluation; fault diagnosis

现实事物可以分为两类：确定性事物和不确定性事物．不确定性有两种：有明确的定义但不一定出现的事件中包含的不确定性称为随机性，已经出现但难以给出精确定义的事件中包含的不确定性称为模糊性．对于不一定出现的随机事件，我们以概率论来研究其统计规律，计量其出现的可能性大小，随机事件一旦出现也就确定下来．因此，对于已经出现的事件，可以将它们分为两类：确定性事物和模糊事物．为研究模糊事物的分类及内部特性，美国加州大学伯克莱分校的 L.A.Zadeh 教授提出了模糊集理论 [1]，在研究人类思维、判断过程的建模中，用模糊集作为定量化的手段，将人类语言中固有的多义和不确定信息定量地表示出来．模糊集打破了传统的普通集只有特征函数 0 和 1 的界限，任一元素可同时部分地属于多个模糊子集，并用区间 [0,1] 中的隶属度值表示其“属于”某模糊集的程度．显然，这

* 广东省自然科学基金（994227）资助项目．

种表示方式比普通集更自然、更接近于人的表达方式. 隶属函数的设置方法依实际问题的不同而异，其中含有较大的经验性. 自模糊集理论创立至今，隶属函数的值域都延用 Zadeh 确定的归一化的 [0,1] 区间，本文称之为常规隶属函数. 本文研究的是将其扩展为 $[-1,1]$ 区间的问题. 隶属函数的扩展主要来自于以下思想：常规的隶属函数仅在论域的一定范围内考虑自变量“肯定”某模糊集的程度，而用隶属度为 0(或很小) 来表示“不肯定”，但却无法描述“否定”的程度. 隶属函数扩展之后，可增加其“表现力”，在整个论域的范围内细致地刻划从“完全肯定”到“不肯定”直至“完全否定”的渐变过程，这样更接近人的思维方式. 由于扩展隶属函数全面描述了事物的两重性，它特别适用于诸如故障诊断、决策和推理等需要进行模糊评判的各类过程. 本文将通过实例证明其相对于常规隶属函数的优越性.

1 预备知识

集合理论研究的是非常广泛、非常一般的客体，我们称之为类. 类的一个基本性质就是：类完全由它的元所决定；如果两个类有相同的元，它们就是同一个客体. 数学上严格地说，类分为两种：一种是可以顺利进行类运算的“OK 类”，一种是限制运算的“固有类”. “OK 类”是一种集合，对集合可以给出一些运算的公理和命题，运算之后仍给出集合；而关于“固有类”，一般是并不都能运算的. 直观地说，集合就是那些能够形成元关系的类.

根据子集公理格式，由论域的任意一个性质可以确定一个集合，而性质是用命题逻辑给出的. 命题逻辑从一些基本的字母开始，第一步构成各种层次的关系把一些术语形成一些元公式，第二步将各元公式用一些命题联结符号和量词符号组合成复杂公式.

由于矛盾的普遍性，一个类或集合的任意一个性质总存在对立面，例如：有正就有负，有大就有小等等. 对于事物的任一个性质 P，其对立性质仅用“$\neg P$”(不是 P) 来表示显然不够精确，因为不是 P 不等于是 P 的对立面. 以下定义性质联结符号“取反”，以描述一对互相对立的性质之间的运算关系，并补充矛盾公理以描述矛盾的普遍性.

定义 1 “取反”符号为：╳，在一对互相对立的性质对 S 和 E 中，╳S 表示取性质 S 的对立性质 E.

矛盾公理 由于矛盾的普遍性，事物的任一性质一定有其对立性质，在一个具体的讨论环境下，一个性质 S 仅有一个对立性质 E，性质 S 和其对立面 E 组成一对矛盾性质对，矛盾性质对中的 S 和 E 互相依存，同时存在和同时消亡，另一方面，它们又互相排斥、互相否定.

2 集合的特征函数及其扩展

在给定论域 U 中，集合 A 一旦确定，则论域 U 中任一元素 u 与集合 A 之间的关系是：要么属于，要么不属于，二者必居其一且仅居其一. 这种隶属关系可采用值域为 $\{0,1\}$ 的集合的特征函数来表征，本文称之为常规特征函数 (CCF — Conventional Characterization Function). 以下讨论的论域 U 上的集合 A 均指由某一性质 S 所确定的集合. 利用子集公理格式，我们定义反集如下：

定义 2 在给定论域 U 中，对任意一对矛盾性质对 S 和 E，存在一对集合 A 和 B，A 的元恰是 U 中那些具有性质 S 的元，B 的元是 U 中那些具有性质 E 的元. 则 A 和 B 称为在矛盾性质对 S 和 E 上的一对矛盾集合，B 称为 A 在 S 和 E 上的反集，记为 A^o.

A 和 A^o 的并集记为 $S\&E$ 上的矛盾集 C，矛盾集 C 在论域 U 中的余集记为矛盾集合对 A 和 A^o 之间的中介集，记为 A^{T}. 由定义 2 可以得到：

1) $A\cap A^o=\varnothing$，$A\cup A^o=C$；

2) $A^{\mathrm{T}}=U-C$;

3) 当 $A\cup A^o=U$ 时，$A^{\mathrm{T}}=\varnothing$.

可见，若在给定的论域 U 上定义一个集合 A，则由于 A 的确定，论域 U 可以划分为三个部分：集合 A、反集 A^o, 集合 A 和反集 A^o 之间的中介集 A^{T}, 这就相当于根据集合 A 的性质对论域 U 进行划分. 这一划分过程可以用图 1 表示.

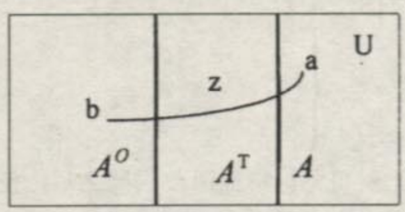

图 1 论域 U 的集合图

定义 3 给定论域 U 和其中一个集合 A，$A\subset U$，以 A^o 表示集合 A 在某一具体讨论环境下的反集，以 A^{T} 表示集合 A 和反集 A^o 之间的中介集. 定义映射 $\psi_A^*:U\to\{-1,0,1\}$，令：

$$\psi_A^*(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in A^{\mathrm{T}},\\ -1, & x\in A^{o},\end{cases}$$

称 $\psi_A^*(x)$ 为集合 A 的扩展特征函数.

常规特征函数与扩展特征函数的本质区别在于：常规特征函数只关心集合包含了论域中的哪些元素；而扩展特征函数则强调论域中互相矛盾的一对集合，以 +1, −1 准确地描述了一对矛盾集合对，同时以 0 值将中介集与矛盾集合对区别开，细致地刻划了给定论域的全貌. 因此，当元素变量 u 在整个论域中变化时，例如，u 沿图 1 中的曲线 z 从 a 变到 b 时，集合 A 的常规特征函数以 1 和 0 来描述 u 是在 A 的内部还是在其外部；而当 u 在 A 外部时，扩展特征函数还可以区分出 u 是进入了反集 A^o 内部还是处于中介集 A^{T} 中. 可见，特征函数是基于二值逻辑的，而扩展特征函数则基于三值逻辑，两者描述事物的角度不同.

在扩展特征函数描述下，集合的并、交运算律仍然适用，此时不定义余运算，因为余运算是基于二值逻辑的，所以扩展特征函数描述下的集合不定义补集. 一旦对扩展特征函数描述下的集合进行余运算并产生补集，则退化为基于二值逻辑的常规特征函数描述下的集合.

例 1 一个 300 人的工厂民主选举，张三以 220 票赞成、40 票弃权、40 票反对当选厂长. 此事件可描述为：以所有选票为论域 U，x 代表选票变量. 赞成选票组成集合 A，弃权选票组成集合 A^T，反对选票组成集合 A^o. 则集合 A 的常规特征函数和扩展特征函数分别为：

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in A^{\mathrm{T}}\cup A^{o}(\text{ 即}x\notin A),\end{cases}$$

$$\psi_A^*(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in A^{\mathrm{T}},\\ -1, & x\in A^{o}.\end{cases}$$

由上例可见，特征函数扩展之后，使事物内部的两个对立面及其中介得到很好的区分，这种描述方法适合于研究事物内部矛盾的布局及其发展. 通过集合的扩展特征函数的变化过程，可以揭示出事物内部矛盾双方的动态及其在整体中的主次地位.

3 模糊集隶属函数的概念及其扩展

自然和社会现象中，事物间的差异往往存在中介过渡过程，许多概念没有明确外延，我们称之为模糊概念. 由于矛盾的普遍性，事物的任一具有模糊意义的性质一定存在其对立性质. 我们补充模糊意义上的矛盾公理以描述模糊意义上相互对立的矛盾双方.

模糊意义上的矛盾公理 由于矛盾的普遍性，事物的任一具有模糊意义的性质一定存在对立性质，在一个具体的讨论环境下，一个性质 $\tilde{S}$ 仅有一个对立性质 $\tilde{E}$，即 $\tilde{E}=\between\tilde{S}$，由 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{E}$ 组成一对模糊意义上的矛盾性质对，其中的 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{E}$ 互相依存、互相排斥、互相否定.

扎德仿照集合特征函数描述方法，用隶属函数表示模糊集合，他把特征函数的取值范围从 {0,1} 两个值扩大为隶属函数的 [0,1] 闭区间上的连续值，以描述某一特定元素对一个模糊子集的隶属程度. 本文称之为常规隶属函数 (CMF — Conventional Membership Function). 在常规隶属函数描述下，$\tilde{A}$ 的支集 (Support) 是论域 U 中常规隶属度为正值的点的集合，$\tilde{A}$ 的高度 (Hight) 是 U 上常规隶属度的极大值，$\tilde{A}$ 的过渡点 (Crossover Point) 是 U 上常规隶属度等于 0.5 的点，隶属度大于 0.5 表示支持度大，隶属度小于 0.5 表示支持度小.

模糊集合完全由其隶属函数刻划. 给定论域 U 上一个模糊集合 $\tilde{A}$，元素 u 的常规隶属度大于零表示 u 对 $\tilde{A}$ 的支持程度；常规隶属度等于零表示 u 不支持 $\tilde{A}$，至于是否反对 $\tilde{A}$ 则无法确定. 有时，我们不但要关心论域中的元素支持某一给定模糊集的程度，也要关心那些元素反对这一模糊集的程度，只有这样，才能准确地刻划这一具体论域中的元素与论域上的模糊集的关系.

定义 4 所谓给定了论域 U 上的一个模糊子集 $\tilde{A}$，是指：给定 U 上的一对矛盾性质对 $\tilde{S}$ 和 $\tilde{E}$, 对于任意 $u\in U$，都指定了一个数 $\mu_{\tilde{A}}^*(u)\in[-1,1]$, $\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 的正值对应于 u 支持模糊性质 $\tilde{S}$ 的程度，负值对应于 u 支持模糊性质 $\tilde{E}$ 的程度，$\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 叫做 u 对 $\tilde{A}$ 的扩展隶属度. 映射

$$\mu_{\tilde{A}}^*:U\to[-1,1],\qquad u\mapsto\mu_{\tilde{A}}^*(u)$$

叫做 $\tilde{A}$ 的扩展隶属函数 (EMF—Expanded Membership Function). $\tilde{A}$ 的支集 (Support) 是 U 中 $\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 为正值的点的集合，$\tilde{A}$ 的斥集 (Excluder) 是 $\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 为负值的点的集合，$\tilde{A}$ 的高度 (Height) 是遍及 U 上 $\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 的极大值，$\tilde{A}$ 的深度 (Depth) 是遍及 U 上 $\mu_{\tilde{A}}^*(u)$ 的极小值，$\tilde{A}$ 的过渡点 (Crossover Point) 是 U 上扩展隶属度为 0 的点，此时，元素 u 对模糊子集 $\tilde{A}$ 所具有的模糊性质 $\tilde{S}$ 表示中立.

隶属函数扩展之后，模糊集的并、交运算律仍然适用，同理，此时不定义余运算和补集. 一旦对扩展隶属函数描述下的模糊集进行余运算从而产生补集，则退化为基于常规隶属函数描述下的模糊集. 以下给出隶属函数扩展后需要调整的概念和运算：

1) 反集. 模糊集合 $\tilde{A}$ 的反集 $\tilde{A}^o$ 由 (1) 式定义：

$$\mu^*_{\tilde{A}^o} = -\mu^*_{\tilde{A}}(x), \quad 对\forall x \in X. \tag{1}$$

由 (1) 式可见，模糊集合 $\tilde{A}$ 和它的反集 $\tilde{A}^o$ 满足以下的等式：

$$\mathrm{Supp}\tilde{A} \cap \mathrm{Supp}\tilde{A}^o = \varnothing, \tag{2}$$

即 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$ 组成一对模糊意义上的矛盾集，而它们的支集则组成一对普通的矛盾集.

2) 过渡集. 模糊集合 $\tilde{A}$ 及其反集 $\tilde{A}^o$ 之间的过渡集 $\tilde{A}^{\mathrm{T}}$ 由下式定义：

$$\mu^*_{\tilde{A}^{\mathrm{T}}}(x) = 1 - |\mu^*_{\tilde{A}}(x)|, \tag{3}$$

过渡集对应于 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$ 之间的过渡状态，所以其扩展隶属度值介于 0 和 1 之间. 这与人的思维方式是一致的. 相应地，由过渡点组成的集合 A^{T} 是普通矛盾集 $\mathrm{Supp}\tilde{A}$ 和 $\mathrm{Supp}\tilde{A}^o$ 的中介集，它们满足：

$$\mathrm{Supp}\tilde{A} \cup \mathrm{Supp}\tilde{A}^o = U时, \quad A^{\mathrm{T}} = \varnothing. \tag{4}$$

在 $\tilde{A}$ 的扩展隶属函数描述下，论域 U 可清楚地划分为三部分： $\mathrm{Supp}\tilde{A}$, A^{T} 和 $\mathrm{Supp}\tilde{A}^o$ ；而在 $\tilde{A}$ 的常规隶属函数描述下，论域 U 只划分为两部分：$\mathrm{Supp}\tilde{A}$ 和 $\mathrm{Supp}\tilde{A}'$. 可见，扩展隶属函数使事物内部的两个对立面及其中介在模糊意义上得到很好的区分，我们可以根据扩展隶属度值分辨出某一元素是在给定模糊集合的支集上，还是处于其斥集上，或是进入了过渡点集中. 与扩展特征函数相对应，基于三值逻辑的扩展隶属函数描述方法适合于研究模糊意义上的事物内部矛盾，通过模糊集扩展隶属函数的变化过程，可以揭示出事物内部在模糊意义上互相对立的矛盾双方 (例如社会中的积极因素与消极因素) 的动态及其在整体中主次地位的转变.

例 2 图 2 是 Zadeh 教授给出的著名例子，以年龄为论域， $X = [0, 200]$ ，模糊集“年老” ($\tilde{O}$) 和“年轻” ($\tilde{Y}$) 的常规隶属函数分别为：

$$\mu_{\tilde{O}}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 50, \\ (1 + (\dfrac{x-50}{5})^{-2})^{-1}, & 50 < x \le 200, \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 25, \\ (1 + (\dfrac{x-25}{5})^{2})^{-1}, & 25 < x \le 200, \end{cases}$$

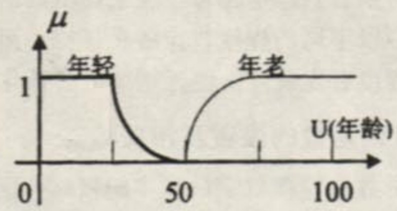

图 2 “年轻”、“年老” 的常规隶属函数曲线

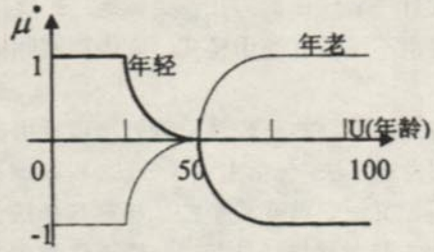

图 3 “年轻”、“年老” 的扩展隶属函数曲线

为满足 (2) 式，将 $\tilde{Y}$ 的常规隶属函数修正为：

$$\mu_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 25, \\ (1 + (\dfrac{x-25}{5})^{2})^{-1}, & 25 < x < 50, \\ 0, & 50 \le x \le 200, \end{cases}$$

则 $\tilde{O}$ 和 $\tilde{Y}$ 的扩展隶属函数曲线如图 3 所示，即：

$$\mu^*_{\tilde{O}}(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x \le 25, \\ -(1 + (\dfrac{x-25}{5})^{2})^{-1}, & 25 < x \le 50, \\ 0, & x = 50, \\ (1 + (\dfrac{x-50}{5})^{-2})^{-1}, & 50 \le x \le 200, \end{cases}$$

$$\mu^*_{\tilde{Y}}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 25, \\ (1 + (\dfrac{x-25}{5})^{2})^{-1}, & 25 < x \le 50, \\ 0, & x = 50, \\ -(1 + (\dfrac{x-50}{5})^{-2})^{-1}, & 50 < x \le 200. \end{cases}$$

由例 2 可见，隶属函数扩展后，可表达更丰富的内容. 例如，常规隶属函数表达 60 岁和 90 岁属于“年轻”的程度都是 0 ，而扩展隶属函数可将它们区分开，更符合人的思维习惯.

归纳起来，扩展隶属函数与常规隶属函数相比，其长处主要在于：1) 表达了事物的两重性，既包含“支持”信息，也包含“反对”信息；2) 值域扩大后，使常规隶属函数不加区分的、有明显不同特征的点对应不同的扩展隶属度值，表现过渡细节的能力更强，且接近于人的常识；3) 扩展隶属函数描述方法适合于研究模糊意义上的事物内部矛盾，通过扩展隶属函数的变化过程，可以揭示模糊事物内部互相对立的矛盾双方的动态及其在整体中主次地位的转变；4) 扩展隶属函数对于需要进行模糊评判的

各类过程特别有效，是因为扩展隶属函数的正值在评判过程中以不同的程度肯定各个证据，而负值则以恰当的程度否定疑点，使评判结果清晰化.

4 扩展隶属函数的设置及相关概念

隶属函数是模糊数学最基本的概念，正确构造隶属函数是应用模糊数学方法的关键. 由于隶属函数的设置要与各实际应用领域的经验和常识相符，目前仍没有一套统一的方法. 类似地，扩展隶属函数的设置也不可能有通用模式，应依据实际情况灵活处理.

扩展隶属函数的一般性设置方法可延用常规隶属函数的设置方法，包括主观评分法、模糊统计法、蕴含解析定义法、可变模型法、相对选择法、滤波函数法和二元对比排序法等[6]. 需要注意的是，延用常规隶属函数的设置方法设置扩展隶属函数时，不但要确定论域中的元素“属于”(支持)某模糊集合的程度，当某一元素“不属于”(不支持)该模糊集合(相当于常规隶属函数等于零)时，还要确定这些元素“反对”该模糊集合的程度.

在具体应用领域中，特别是模糊评判过程中，大量的问题是：在评判论域上设有三个模糊集合(如：正常、不正常、反常)，其中两个模糊集合所对应的性质互相对立，另一个为它们的中间过渡. 这时，可利用扩展隶属函数的一般性设置方法，给出其中一个模糊集合的扩展隶属函数，其余两个模糊集合的扩展隶属函数可由反集和过渡集的定义确定. 图 4 是这种设置方法的例子，图 5 则是相应的模糊集合在论域 U 上的示意图.

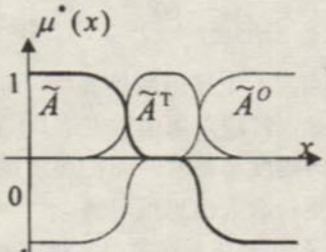

图 4 $\tilde{A}$, $\tilde{A}^o$ 和 $\tilde{A}^{\mathrm{T}}$ 的扩展隶属函数的设置

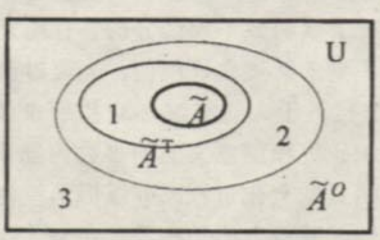

图 5 论域 U 上 $\tilde{A}$, $\tilde{A}^o$ 和 $\tilde{A}^{\mathrm{T}}$ 的示意图

由图 5 可以说明扩展隶属函数的几个重要概念. 图 5 的中心环形为模糊集 $\tilde{A}$ 的核，$\mu^*_{\tilde{A}}(x)=1$；区域 1 中，$0<\mu^*_{\tilde{A}}(x)<1$；区域 2 中，$0<\mu^*_{\tilde{A}^o}(x)<1$；区域 3 为反集 $\tilde{A}^o$ 的核，$\mu^*_{\tilde{A}^o}(x)=1$；普通集合的内部和外部是确定的，而对于模糊集，图 5 反映的思想是：当某模糊集确定后，与其含义相对立的反集以及它们的过渡集在模糊意义上是明确的. 在论域中，当元素变量从模糊集合 $\tilde{A}$ 的核逐渐改变为其反集的核时，常规隶属函数以 1 到 0 来描述这一过程(不区分区域 2 和 3)，而扩展隶属函数则以 1 到 -1 来描述. 上述思想与人的思维模式是一致的.

以下三点需要说明：

1) 对于模糊意义上的矛盾集合对 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$, 如果它们的常规隶属函数已经设定，且满足 $\mathrm{Supp}\tilde{A}\cap\tilde{A}^o=\varnothing$，则可利用它们来确定扩展隶属函数. 此时，$\tilde{A}$ 的扩展隶属函数为：

$$\mu^*_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\mu_{\tilde{A}}(x), & \mu_{\tilde{A}}(x)>\mu_{\tilde{A}^o}(x),\\ 0, & \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}^o}(x),\\ -\mu_{\tilde{A}^o}(x), & \mu_{\tilde{A}}(x)<\mu_{\tilde{A}^o}(x),\end{cases} \tag{5}$$

而 $\tilde{A}$ 的反集 $\tilde{A}^o$ 以及过渡集 $\tilde{A}^T$ 的扩展隶属函数分别由其定义确定.

2) 如果 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$ 的常规隶属函数不满足 $\mathrm{Supp}\tilde{A}\cap\mathrm{Supp}A^o=\varnothing$ 的规定，则不能利用它们来确定扩展隶属函数. 此时，应利用扩展隶属函数的一般性设置方法确定模糊集合 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$ 的扩展隶属函数，使模糊集合 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{A}^o$ 的扩展隶属函数满足 $\mathrm{Supp}\tilde{A}\cap\mathrm{Supp}A^o=\varnothing$，这与人们思维中互相对立的双方是互不交叉的逻辑是一致的.

3) 对于论域上设有多个模糊子集的问题，应依据实际情况设置.

5 故障诊断实例

模糊综合评判方法是最常用的智能化故障诊断方法之一，但其诊断精度还远远达不到人们的要求，主要原因是：以往利用常规隶属函数进行故障诊断时，只考虑故障征兆肯定故障原因的程度，而没有考虑故障征兆否定故障原因的程度，于是诊断结果通常是各故障的隶属度值相差不大，很难据此对各故障模式进行正确的划分. 利用扩展隶属函数进行故障诊断可以更好地模拟人类肯定证据和排除假象的决策思维方式，得到清晰的故障诊断结果.

为说明扩展隶属函数相比于常规隶属函数的优越性，以下采用文献 [7] 的实例，利用扩展隶属函数和二级模糊综合评判模型进行故障诊断，其中的复

合运算采用 $M(\cdot,+)$ 模型 [8].

例 3 某型超短波军用电台的组成为：电台 ={接收机低频部分，接收机高频部分，发射机低频部分，发射机高频部分 }= $\{C_1^{(1)},C_2^{(1)},C_3^{(1)},C_4^{(1)}\}$ ，其中 $C_1^{(1)}$={低频电压放大器，耳机，低频功率放大器 }=$\{C_1^{(2)},C_2^{(2)},C_3^{(2)}\}$ ， $\{C_2^{(1)}\}$={中放，高放 }=$\{C_4^{(2)},C_5^{(2)}\}$ ， $\{C_3^{(1)}\}$={自听检波器，低频电压放大器，低频功率放大器，喉头送话器 }=$\{C_6^{(2)},C_7^{(2)},C_8^{(2)},C_9^{(2)}\}$ ， $\{C_4^{(1)}\}$={主振器，第一倍频器，第二倍频器，高频功率放大器 }=$\{C_{10}^{(2)},C_{11}^{(2)},C_{12}^{(2)},C_{13}^{(2)}\}$.

1) 一级模糊综合评判：对电台的四大组成部分进行一级评判.

一级因素论域 U = {噪声电压，自听电流，灯光电流 }=$\{x_1,x_2,x_3\}$ ，一级评判论域 V={正常，不正常，反常 }=$\{\nu_1,\nu_2,\nu_3\}$，该电台某次故障的数据为： $\{x_1,x_2,x_3\}$={10V,5V,0.4mA}. 引用文献 [7] 的数据，一级因素的指标分档如表 1 所示.

表 1 各指标分档表

数值范围	正常 ν_1	不正常 ν_3	反常 ν_5
x_1V	8~12	4	0~2
x_2V	30~70	5	0~2
x_3mA	0.2~0.6	0.05,1.85	0~0.02,1.95~2

根据表 1 数据，采用图象法以分段二次曲线拟合出各因素的扩展隶属函数曲线如图 6 所示. 其中，$\mu_{ij}^{*}(x_j)$ 表示第 i 个因素 x_i 隶属于第 j 个评判等级 ν_j 的扩展隶属度.

由图 6 得到单因素评判矩阵：

$$\tilde{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix},$$

一级因素权重分配矩阵为：

$$A^{(1)}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.45&0.45&0.10\\1&0&0\\0.05&0.80&0.15\\0&0.40&0.60\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\\C_1^{(1)}\\C_2^{(2)}\\C_3^{(3)}\\C_4^{(4)}\end{array}.$$

一级评判结果为：

$$\tilde{B}^{(1)}=A^{(1)}\circ\tilde{R}^{(1)}=\begin{bmatrix}0.55&0.45&-0.55\\1&0&-1\\0.2&0.8&-0.2\\0.6&0.4&-0.6\end{bmatrix}.$$

根据最大隶属度原则， $C_1^{(1)},C_2^{(1)},C_4^{(1)}$ 属于正常， $C_3^{(1)}$ 属于不正常.

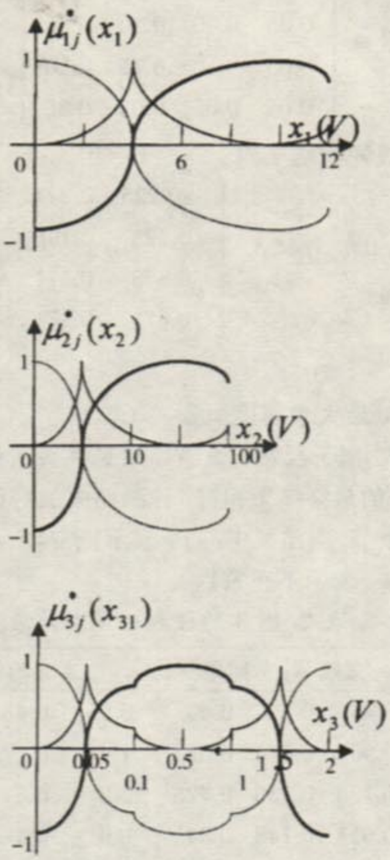

图 6 例 3 中各因素的扩展隶属函数曲线

(粗线 - 正常，细线 - 不正常，虚线 - 反常)

2) 二级模糊综合评判：对 $C_3^{(1)}$ 的四个组成部分进一步作二级评判.

二级因素论域 U = {喉头送话器的端直流电压，低放变压器 (B_{152}) 次级的交流电压，低功放变压器 (B_{153}) 次级的交流电压，自听检波器输出电流 }=$\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ ，二级评判论域 V 与一级评判论域相同，故障信息为： $\{y_1,y_2,y_3,y_4\}=\{10V,B_{152}$ 的交流电压有一定变化， B_{153} 的交流电压有一定变化， 0.4mA}. 与步骤 1 相同，可求出二级因素论域中四个因素的扩展隶属函数，并得到单因素评判矩阵 (计算过程略) ：

$$\tilde{R}^{(2)}=\begin{bmatrix}-0.75&0.25&0.75\\0.75&0.167&-0.75\\0.75&0.167&-0.75\\0.75&0.167&-0.75\end{bmatrix}.$$

发射机低频部分的四个组成部件的因素权重矩

阵为：

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.65 & 0.15 & 0.15 & 0.05 \\ 0.35 & 0.50 & 0.10 & 0.05 \\ 0.05 & 0.10 & 0.75 & 0.10 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.85 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ C_6^{(2)} \\ C_7^{(2)} \\ C_8^{(2)} \\ C_9^{(2)} \end{array}$$

二级评判结果为：

$$\tilde{B}^{(2)} = A^{(2)} \circ \tilde{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.225 & 0.221 & 0.225 \\ 0.225 & 0.196 & -0.225 \\ 0.675 & 0.171 & -0.679 \\ 0.675 & 0.171 & -0.679 \end{bmatrix}.$$

根据最大隶属度原则，$C_7^{(2)}, C_8^{(2)}, C_9^{(2)}$ 属于正常，$C_6^{(2)}$ 属于反常，诊断结果是喉头送话器坏，与文献 [7] 的最终结果相符．诊断结果的对比如表 2 所示（文献 [7] 的结果中，ν_1 表示正常，ν_2 表示不太正常，ν_3 表示不正常）．

表 2 例 3 的评判结果对比表

	文献 [7] 的结果			本文的结果		
$C_1^{(1)}$	0.45	0.1	0.45	0.55	0.45	−0.55
$C_2^{(1)}$	0.901	0.074	0.093	1	0	−1
$C_3^{(1)}$	0.136	0.136	0.725	0.2	0.8	−0.2
$C_4^{(1)}$	0.511	0.148	0.341	0.6	0.4	−0.6
$C_6^{(2)}$	0.155	0.173	0.672	−0.225	0.221	0.225
$C_7^{(2)}$	0.49	0.164	0.346	0.225	0.196	−0.225
$C_8^{(2)}$	0.74	0.164	0.096	0.675	0.171	−0.675
$C_9^{(2)}$	0.75	0.167	0.083	0.675	0.171	−0.675

可见，本文的评判结果明显比文献 [7] 的结果清晰，这主要体现在以下两点：

①由本文的评判结果，很容易确认诊断对象属于哪一评判等级，而文献 [7] 的结果中存在一些难以确认的模糊现象或矛盾．例如，我们无法根据文献 [7] 的结果判断接收机低频部分 $C_1^{(1)}$ 是属于 ν_1(正常) 还是属于 ν_3 (不正常)．

②本文的评判结果中，评判对象对评判等级的隶属度分布比文献 [7] 的结果更为合理．这主要表现在：本文的评判结果除最大隶属度对应的评判等级外，评判对象对其它评判等级的隶属度呈现依次下降的趋势，而文献 [7] 的结果出现了多次波动，甚至出现了双峰现象，即存在自相矛盾的结果．

评判结果清晰度的提高，是由于扩展隶属函数准确而又细致地刻划了整个论域上的各个元素与其中的模糊子集的关系，使得在综合评判过程中明确肯定证据的同时，也明确地排除假象，诊断结果更加清晰化．

6 结论

本文提出了扩展特征函数和扩展隶属函数的新概念，讨论了扩展隶属函数的相关概念及在设置中应注意的问题．扩展隶属函数能够反映整个论域中元素变量对模糊集从“肯定”到“否定”的全过程，其表现过渡细节的能力更强．此外，使扩展隶属函数的值域包含负值，对某些问题的解决是有利的．在故障诊断中的应用实例证明，隶属函数扩展后，具有显著的优越性．扩展隶属函数对于需要进行模糊评判的各类过程特别有效，是因为扩展隶属函数的正值在评判过程中以不同的程度肯定各个证据，而其负值则以恰当的程度否定假象，使评判结果更加清晰化．凡是可以利用模糊理论解决的问题，都必然与隶属函数的设置直接相关．因而扩展隶属函数的理论意义和应用前景是明显的．建立有关的相对完整的理论体系是需要进一步研究的课题，而扩展隶属函数对各类应用领域的有效性是进一步研究的方向．

参考文献

1 L.A.Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8: 338 – 353

2 程极泰．集合论．北京：国防工业出版社，1985

3 Dalen, d. Van. Sets: Naive, Axiomatic and Applied. New York: Pergamon, 1978, 1 – 40

4 Kuneu K. Set Theory: an introduction to independence proofs. Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1980, 1 – 42

5 Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its application to Approximate Reasoning- I． Information Sciences, 1975, 8: 199 – 219

6 Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. IEEE Trans. Syst. Man, and Cybern., 1973, 3(1): 28 – 44

7 欧阳道坤，李学平． Fuzzy 数学在故障分析中的应用．模糊数学，1985, 5(3): 65 – 75

8 王光远．论综合评判几种数学模型的实质及应用．模糊数学，1984, 4(4):81 – 88

9 杨苹．复杂系统故障的智能诊断方法的研究：[博士学位论文]．华南理工大学，广州，1998

10 杨苹，张昊．扩展隶属函数及其在故障诊断中的应用． 1998 中国控制会议论文集．北京：国防大学出版社，1998,975 – 982

11 杨苹，吴捷．复杂系统故障诊断综述 — 测控技术． 1998, 17(2): 5 – 12