非线性 DEDS 的能达性 *

陈文德

（中国科学院系统科学研究所系统控制实验室・北京，100080）

摘要：本文提出了非线性 DEDS 的两种能达性的定义与判据，比较了两种能达性，也研究了对偶系统的能达性.

关键词：离散事件动态系统 (DEDS); 极大代数；非线性；能达性

Reachabilities of Nonlinear DEDS

Chen Wende

(Laboratory of Systems and Control, Institute of Systems Science, Chinese Academiy Sciences · Beijing, 100080, P. R. China)

Abstract: In this paper, the definitions and criterions of two kinds of reachabilities for nonlinear DEDS are given, two kinds of reachabilities are compared, the reachabilities of dual systems are also studied.

Key words: discrete event dynamic systems (DEDS); max-algebra; nonlinear; reachabilities

1 引言

极大代数上的线性系统描写的离散事件动态系统 (DEDS) 已有了较多研究. 最近，由于数字集成电路的需要，相应的非线性系统理论正在开拓：HP 计算机公司的数学科学基础研究所 (BRIMS) 所长 Gunawardena J. 等用极小极大函数方法研究了自治的非线性 DEDS [1], 证明了深刻的对偶定理 [2]. 文 [3] 提出了非自治的非线性 DEDS 模型，得到了周期时间能配置的充要条件. 本文对非线性的 DEDS, 提出了能达性与分别能达性的定义，证明了它们的判据，指出：分别能达性比能达性强，对于对偶系统的能达性也得到了相应结果.

2 能达性的定义

令 R 表示实数域， $\bar{\mathrm{R}} =: \mathrm{R}\cup\{-\infty\}, \tilde{\mathrm{R}} =: \mathrm{R}\cup\{+\infty\}, a\vee b =: \max(a,b), a\wedge b =: \min(a,b)$; 定义极大代数 $D =: (\bar{\mathrm{R}},\vee,+)$, 极小代数 $\tilde{D} =: (\tilde{\mathrm{R}},\wedge,+), x =: [x_1,\cdots,x_n]^\tau$.

定义 1[1] 一个函数 $f:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$, 当它的每个分量 $f_i:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}$ 能对某个 j 写出 $f_i(x)=x_j+a$, 这里 $a\in\mathrm{R}$, 则称 f 为简单函数；由简单函数用 $\vee,\wedge$ 运算构造出的函数 $F:\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^n$ 称为极小极大函数，记为 $F\in MM(n,n)$.

引理 1[1] 令 $F\in MM(n,n)$, 则 F 能表为

$$F(x)=\wedge_{i\in I}(A_i x)=\vee_{j\in J}(\tilde{A}_j x). \tag{1}$$

这里 $A_i\in D^{n\times n}$, $\tilde{A}_j\in\tilde{D}^{n\times n}$, $A_i x, \tilde{A}_j x$ 分别为 $D,\tilde{D}$ 上矩阵运算， I,J 为有限集.

文 [3] 提出了以下非自治的非线性 DEDS:

$$\begin{cases} x(k+1)=F(x(k))\vee Bu(k), & (2)\\ y(k)=Cx(k), & (3)\end{cases}$$

其中 $F\in MM(n,n), B\in D^{n\times r}, C\in D^{p\times n}, x(k)\in\mathrm{R}^n, u(k)\in\mathrm{R}^r, y(k)\in\mathrm{R}^p$, 矩阵运算在 D 上进行. 由引理 1 与分配律，不失一般性 (2) 可改写为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \wedge_{i\in I}(A_i x(k))\vee Bu(k)\\ &= \wedge_{i\in I}(A_i x(k)\vee Bu(k)).\end{aligned} \tag{4}$$

系统 (4) 与以下有限个线性子系统密切相关：

$$x(k+1)=A_i x(k)\vee Bu(k). \tag{5}$$

这里 $i\in I$. 文 [4] 对系统 (5) 的能达性作了系统研究，论述了两种能达性，其中之一如下：

定义 2[4] 考察系统 (5) 对应的 Petri 网，能与某输入变迁 u_{r_i} 连通的中间变迁 x_i 对应的状态分量 x_i 称为能达的；否则，称为不能达的.

本文提出以下定义.

定义 3 考察系统 (4), 它有有限个子系统 (5);

* 国家自然科学基金 (69874040) 与国家攀登计划资助项目.

若对每个 $i\in I$, 子系统 (5) 的某状态分量 x_t 都是能达的，则称 x_t 是系统 (4) 的能达状态分量；否则称为不能达的状态分量.

若系统 (4) 的 n 个状态分量都是能达的，则称系统 (4) 是能达的，这个系统能达的定义与文 [3] 一致.

对应于文 [4], 本文提出第二种能达性的定义.

定义 4 把 $x(k)$ 的定义域由 R^n 扩展到 D^n, $u(k)\in\mathrm{R}^r$ 扩展为 $u(k)\in D^r$ 后的系统 (4) 记为系统 (4a). 设系统 (4a) 中 $x(0)=[x_1(0),\cdots,x_n(0)]^\tau=[-\infty,\cdots,-\infty]^\tau=:\varnothing$, 若对任意指定实数 $\bar{x}_t$, 存在输入向量序列 $u_t(0),u_t(1),\cdots,u_t(k)$ 使终态分量 $x_t(k+1)=\bar{x}_t$, 则称 x_t 是分别能达的，否则称为不分别能达的. 这里对不同的 t, 输入列可以不同，所以称为“分别”能达. 若系统的 n 个状态分量都是分别能达的，则称系统 (4a) 是分别能达的.

上述定义在定义域中补了 $-\infty$ 元，这是研究非自治系统能达性的自然需要；定义 3 也可作类似处理，以后也统一用“系统 (4a) 的能达性”来表明已补了 $-\infty$ 元.

3 能达性判据

定义 2, 3 给出的能达性本质上是基于系统的连通性结构，定义 2 对应的能达性判据在文 [4] 中已用图与矩阵两种语言给出. 下面引用文 [4] 中的一个结果而不加详细说明.

引理 2[4] 设系统 (5) 的定义域已补了 $-\infty$ 元，A,B 已化成了类似文 [4] (2.2.2) 式所示的块状标准形，记 $A^*=E_n\oplus A_i\oplus\cdots\oplus A^{n-1}$, 其中 E_n 为 D 上 n 阶单位阵，用 A^*_{ij} 记 A^* 的第 i 行第 j 列块；设 B 的子块中仅 $B_{i_s}\neq\varnothing, 1\le s\le\alpha$, A^* 的 i_s 块列中 $\neq\varnothing$ 的块与 $A^*_{i_s}$ 记为 $A^*_{j_r i_s}$, $1\le r\le\beta_s$, 则系统 (5) 的能达分量恰为 x_j, 这里 $x_j\in X_j$, X_j 标记强连通分量内全部状态变量对应的块状变量，$j\in J_i=:\cup_{s=1}^{\alpha}\{j_r\}_{r=1}^{\beta_s}$. 记 J_i 对应的 x_j 的下标集为 $\hat{J}_i$.

系 1 系统 (4a) 的状态分量 x_t 为能达的充要条件是 $t\in\cap_{i\in I}\hat{J}_i$. 系统 (4a) 能达的充要条件是 $\hat{J}_i=\{1,2,\cdots,n\},\forall i\in I$.

由定义 3 与引理 2 立得系 1 的证明.

本节主要研究分别能达的判据.

定理 1 当且仅当存在某个 $k\ge 0$, 某个 $u\in D^r$, 使得

$$(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu) \text{ 的第 } t \text{个分量} \neq -\infty \tag{6}$$

时，系统 (4a) 的状态分量 x_t 是分别能达的，这里 $(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu)$ 表示

$$\wedge_{i\in I}\underbrace{(A_i\wedge_{i\in I}(A_i\cdots\wedge_{i\in I}(A_i\,Bu)\cdots))}_{k\text{ 个}},$$

$k=0$ 时表示 Bu.

证 当条件 (6) 满足时，记 (6) 式所取的非 $-\infty$ 值为 a, 令 $\gamma=\bar{x}_t/a$ 这里 $\bar{x}_t$ 为任意指定实数. 取 $x(0)=\varnothing$, 由 (4a) 式可得

$$\begin{aligned}
&x(1)=Bu(0),\\
&x(2)=\wedge_{i\in I}(A_iBu(0))\vee Bu(1),\\
&\cdots\\
&x(k+1)=(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu(0))\\
&\qquad\vee(\wedge_{i\in I}A_i)^{k-1}(Bu(1))\vee\cdots\\
&\qquad\vee\wedge_{i\in I}(A_iBu(k-2))\vee Bu(k-1);
\end{aligned}\tag{7}$$

当取 $u(0)=\gamma u$, $u(1)=u(2)=\cdots=u(k-1)=\varnothing$ 时，可得

$$\begin{aligned}
x(k+1)&=(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu(0))\\
&=(\wedge_{i\in I}A_i)^{k-1}(\wedge_{i\in I}(A_iB\gamma u))\\
&=(\wedge_{i\in I}A_i)^{k-1}(\wedge_{i\in I}(A_i\gamma Bu))\\
&=(\wedge_{i\in I}A_i)^{k-1}(\wedge_{i\in I}(\gamma A_iBu))\\
&=(\wedge_{i\in I}A_i)^{k-1}(\gamma\wedge_{i\in I}(A_iBu))\\
&=\gamma(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu);
\end{aligned}$$

所以，$x(k+1)$ 的第 t 个分量 $x_t(k+1)=\gamma\cdot a=\bar{x}_t$, 即 x_t 是分别能达的.

若条件 (6) 不满足，即对任意 $k\ge 0$, 任意 $u\in D^\gamma$, 都有 (6) 式左边 $=-\infty$; 由 (7) 可知 $x_t(k+1)=-\infty$, 于是不管如何取输入列 $u_t(0)$, $u_t(1),\cdots,u_t(k)$, 终态分量 $x_t(k+1)$ 总为 $-\infty$, 即 x_t 是不分别能达的. 证毕.

4 能达性的比较

文 [4] 指出：对系统 (5), 能达性与分别能达性等价. 当 I 含一个以上元时，本节将指出：两种能达性不等价，且分别能达性比能达性强.

定理 2 对系统 (4a), 若状态分量 x_t 分别能达，则 x_t 必然能达；当 I 含一个以上元时，反之不然.

证 先证分别能达能导出能达. 当向量各分量 $\ge$ 另一向量对应各分量时，记这向量 $\ge$ 另一向量. 下面用归纳法证以下向量不等式：

$$A_i^kBu\ge(\wedge_{i\in I}A_i)^k(Bu),\quad\forall i\in I,k\ge 0 \tag{8}$$

其中 $u\in D^r$; 当 $k=0$ 时，显然有 $Bu=Bu$, (8) 成

立，当 $k=1$ 时，易知

$$A_iBu \geq \wedge_{i\in I}A_i(Bu), \quad \forall i\in I;$$

现设 $k=N$ 时，(8) 成立，则 $k=N+1$ 时有

$$\begin{aligned} A_i^{N+1}Bu &= A_i(A^NBu) \geq A_i(\wedge_{i\in I}A_i)^N(Bu) \\ &\geq \vee_{i\in I}A_i(\wedge_{i\in I}A_i)^N(Bu) \\ &= (\wedge_{i\in I}A_i)^{N+1}(Bu), \quad \forall i\in I. \end{aligned}$$

(8) 证毕. 若 x_t 分别能达，则由定理 1, 必存在某个 $k\geq 0$, 某个 $u\in D^r$ 使 (6) 成立，于是由 (8) 必有

$$A_i^kBu \text{ 的第} t \text{ 个分量 } =: a_i \geq a \neq -\infty, \quad \forall i\in I, \tag{9}$$

当 I 仅含一个元 i 时，(7) 式成为

$$\begin{aligned} x(k+1) = A_i^kBu(0) \vee A_i^{k-1}Bu(1) \vee \cdots \\ \vee A_iBu(k-2) \vee Bu(k-1); \end{aligned} \tag{10}$$

当取 $u(0) = u\bar{x}_t/a_i$, (这里 $\bar{x}_t$ 为任意指定实数), $u(1)=u(2)=\cdots=u(k-1)=\emptyset$ 时，由 (9) (10) 式得

$$x_t(k+1) = (\bar{x}_t/a_i)\cdot a_i = \bar{x}_t, \quad \forall i\in I.$$

这说明系统 (5) 对每个 $i\in I$, 都有 x_t 是分别能达的；由文 [4] P61 知 x_t 也是能达的；再由定义 3 可得：对系统 (4a), x_t 是能达的.

对定理 2 的后一半，我们用一个反例来证明：令 $I=\{1,2\}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 0 \\ -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\infty \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

对以上定义的系统 (4a), 有 $Bu=[u,-\infty,-\infty]^\tau$,

$$\begin{aligned} & A_1[x_1,x_2,x_3]^\tau \wedge A_2[x_1,x_2,x_3]^\tau \\ = & [x_3,x_2,x_1]^\tau \wedge [x_3,x_1,x_2]^\tau \\ = & [x_3, x_1\wedge x_2, x_1\wedge x_2]^\tau. \end{aligned}$$

于是

$$A_1(Bu)\wedge A_2(Bu) = [-\infty,-\infty,-\infty]^\tau = \emptyset.$$

因而

$$(A_1\wedge A_2)^k(Bu) = \emptyset, \quad \forall k\geq 1, \quad u\in D^r.$$

由定理 1 可知对这系统 (4a), x_3 不分别能达. 但应用引理 2 与系 1 经计算可知：$i=1$ 时，对系统 (5), x_1,x_3 能达；$i=2$ 时，A_2 及 A_2^* 不可约，$B\neq\emptyset$, 所以 x_1,x_2,x_3 均能达；于是对上例中的系统 (4a), x_3 能达，(x_3 能达的结论也可用定义 2, 3 来得到).

证毕.

5 对偶系统

对于 (1) 中的对偶表达式 $F=\vee_{j\in J}\tilde{A}_j$, 文 [3] 提出了以下对偶系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \vee_{j\in J}(\tilde{A}_jx(k)) \wedge Bu(k), & (11) \\ y(k) = Cx(k), & (12) \end{cases}$$

其中 $B\in\tilde{D}^{n\times r}, C\in\tilde{D}^{p\times n}$. 系统 (11) 与以下有限个线性子系统密切相关

$$x(k+1) = \tilde{A}_jx(k) \wedge Bu(k). \tag{13}$$

这里 $j\in J$. 现在 $\min,+\infty$ 对偶地代替了原来的 $\max,-\infty$; 在图中最轻路对偶地代替了原来的最重路. 类似地把定义域中补入 $+\infty$ 元后的系统记为 (11a). 本文用到的文 [4] 中的结果对于 D 改为极小代数 $\tilde{D}$ 后也对偶地成立，仅需指出：文 [4] 中引理 2.2.1 与定理 2.2.3 的证明主要基于图的连通性，在把最重路改为最轻路后，对偶结果均成立，详略. 对于系统 (11a), 只需令 $x(0)=[+\infty,\cdots,+\infty]^\tau =: \emptyset$, 其它都相同于定义 2, 3, 4 即可定义两种能达性，不重复. 下面给出对偶系统 (11a) 的两个定理.

定理 3 当且仅当存在某个 $k\geq 0$, 某个 $u\in\tilde{D}^r$, 使得

$$(\vee_{j\in J}\tilde{A}_j)^k(Bu) \quad \text{的第} t \text{个分量} \neq +\infty$$

时，系统 (11a) 的状态分量 x_t 是分别能达的，这里 $(\vee_{j\in J}\tilde{A}_j)^k(Bu)$ 表示 $\vee_{j\in J}(\underbrace{\tilde{A}_j\cdots\vee_{j\in J}}_{k\text{ 个}}(\tilde{A}_jBu)\cdots)$, $k=0$ 时表示 Bu.

把定理 1 的证明中 $-\infty$ 改为 $+\infty$, $\wedge$ 改为 $\vee$, $\vee$ 改为 $\wedge$ 就证得定理 3, 详略.

定理 4 对系统 (11a), 若状态分量 x_t 分别能达，则 x_t 必然能达；当 J 含一个以上元时，反之不然.

证　类似定理 2 的证明，可得

$$\tilde{A}_j^kBu \leq (\vee_{j\in J}\tilde{A}_j)^k(Bu), \quad \forall j\in J, \quad k\geq 0 \tag{14}$$

进一步，当 x_t 分别能达时，由定理 3, (14) 存在 k,u 使得

$$\tilde{A}_j^kBu\text{的第}t\text{个分量} =: a_j \leq a \neq +\infty, \quad \forall j\in J.$$

下面完全类似于定理 2 的证明可导出 x_t 能达，详

略. 定理的后一半, 只需把定理 2 证明中的反例中各阵的 $-\infty$ 元改成 $+\infty$ 元, 就有:

$$Bu = [u, +\infty, +\infty]^{\tau},$$

$$A_1[x_1, x_2, x_3]^{\tau} \vee A_2[x_1, x_2, x_3]^{\tau}$$

$$= [x_3, x_1 \vee x_2, x_1 \vee x_2]^{\tau},$$

$$A_1(Bu) \vee A_2(Bu) = [+\infty, +\infty, +\infty]^{\tau}.$$

于是由定理 3 知 x_3 不分别能达; 由于能达性是基于连通性, 故仍有 x_3 能达. 证毕.

附记 1 当系统 (4a) 不能达时, 文 [3] 的结果也可以推广. 但由于周期时间是 $\lim_{k\to\infty} F^k(x)/k$, 取决于状态 $F^k(x)$, 与文 [4] 中研究的矩阵内部的强连通分量的特征值 λ_i (或称周期) 有所不同, 因而不能得到与文 [4] 完全对应的结果, 只能得到更复杂的推广结果, 我们将另文详述.

附记 2 对偶于本文, 也可研究能观性, 但比能达性更复杂些, 我们将另文详述.

参考文献

1 Gunawardena J. Min-max function, Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Application, 1994, 4:377–406

2 Gaubert S, and Gunawardena J. The duality theorem for min-max function. HP Laboratories Technical Report, Brstol: 1997, 16:1–6

3 Chen W. Cycle time assignment of DEDS. Proc. of the Intelligent Systems and Control Conference, Santa Barbara, USA, 1999

4 陈文德, 齐向东. 离散事件动态系统, 极大代数方法. 北京: 科学出版社, 1994