用 Lyapunov 函数集分析非线性系统的稳定性 *

郑毓蕃
(华东师范大学系统科学研究所 · 上海，200062)
谢立华
(南洋理工大学电工系 · 新加坡)
张慈深
(墨尔本大学电工与电子工程系 · 澳大利亚)

摘要：本文将 Lyapunov 函数的概念推扩到 Lyapunov 函数集. 对一个非线性系统，一类二次型正定函数集 $\{V_i(x); i\in\{1,2,\cdots,\ell\}\}$ 称为 Lyapunov 函数集，若对系统的任一状态 x, 都存在该状态的一个邻域 U_x 以及该正定函数集中一个正定函数 $V_j(x)$, 满足 $\dot{V}_j(x)<0\ \forall x\in U_x$. 本文证明以下命题：对一个自治系统，如存在该类 Lyapunov 函数集，这个自治系统是渐近稳定的.

关键词：非线性控制系统； Lyapunov- 函数；状态反馈控制；渐近稳定

Stability Analysis of Nonlinear Systems by Lyapunov Function Set

Zheng Yufan
(Institute of Systems Science, East China Normal University · Shanghai, 200062, P. R. China)
Xie Lihua
(Department of Electrical Engineering, Nanyang University of Technology, Singapore)
Zhang Cishen
(Department of Electrical and Electronics Engineering, The University of Melbourne, Australia)

Abstract: The notion of Lyapunov function is generalized into Lyapunov function set. For a nonlinear system a set of quadratic positive definite functions $\{V_I(x); I\in\{1,2,\cdots,\ell\}\}$ is called Lyapunov function set if for each state x there exist a neighborhood U_x of x and a function $V_j(x)$ of the set such that $\dot{V}_j(x)<0\ \forall x\in U_x$. It is shown that for a nonlinear system if there exists a Lyapunov function set, then the system is asymptotically stable.

Key words: nonlinear control systems; Lyapunov function; state feedback control; asymptotically stability

1 导论

本文采用下列记号：

N: 全体整数； N^+: 非负整数全体； R: 实数全体 (实数域)； R_+: 非负实数全体； R^n: n 维实欧氏空间；任给 $0<l\in\mathbf{N}^+$, $\underline{l}:=\{1,2,\cdots,l\}$.

"τ" 表示一个向量或矩阵的转置.

若 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathrm{R}^n$，那末它的范数定义为

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

我们讨论的对象是一般 $C^k(k\geq 0)$ 仿射非线性控制系统，记为：

$$\dot{x}=f(x)+g(x)u. \tag{1}$$

其中 $x\in\mathrm{R}^n$, $u\in\mathrm{R}$ 分别表示 n 维状态向量与控制输入. 假设原点是向量场 $f(\cdot)$ 唯一的平衡点，$f(0)=0$.

在非线性控制理论中有一个著名的结果. 它指出镇定系统（1）的状态反馈控制可以通过求

* 中国国家自然科学基金 (NNSF) 和澳大利亚研究基金会 (ARC) 资助项目.

解一个 Hamilton-Jacobi 不等式来构造 (参见 [1]). 记 $V(\cdot):\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}_+$ 为一个 C^1- 正定的函数, 且 $V(0)=0$, $K(\cdot):\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}_+$ 为一个正定连续函数, $\kappa(\cdot):\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ 是 $\mathcal{K}$- 类函数, 亦即 $\kappa(\cdot)$ 是一个连续, 严格增, 而且满足 $\kappa(0)=0$ 的函数.

对系统 (1), 如果存在 $V(x)$, $K(x)$ 及 $\kappa(\cdot)$ 使得以下 Hamilton-Jacobi 不等式成立: $\forall x(\neq 0)\in\mathrm{R}^n$,

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x)-\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)K(x)g^\tau(x)\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^\tau < -\kappa(\|x\|), \tag{2}$$

那末存在状态反馈控制律

$$u(x)=-K(x)g^\tau(x)\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^\tau \tag{3}$$

使得以下闭环系统

$$\dot{x}=f(x)-g(x)K(x)g^\tau(x)\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^\tau=\bar{f}(x) \tag{4}$$

渐近稳定.

实际上, 容易验证 $V(x)$ 是 (4) 的 Lyapunov 函数. 当 $x\neq 0$, 它满足 $V(x)>0$, 且沿着 (4) 的解轨道的导数

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)&=\frac{\partial V}{\partial x}\bar{f}(x)\\&=\frac{\partial V(x)}{\partial x}f(x)\\&\quad-\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)K(x)g^\tau(x)\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^\tau\\&<-\kappa(\|x\|).\end{aligned}$$

但寻找合适的正定函数 $V(x), K(x)$ 及 $\kappa(\cdot)$ 满足 Hamilton-Jacobi 不等式 (2) 是一个非常困难的问题. 这有些类似于系统的稳定性问题: Lyapunov 方法给出了判别非线性系统稳定性的一般原则, 但对一个系统如何具体构造一个 Lyapunov 函数, 至今仍没有普通适用的良策.

在给出本文主要的结论以前, 我们先考察一个非线性控制系统的例子.

例 1

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_1+(x_1+x_2)u,\\\dot{x}_2&=x_2+(x_1-x_2)u.\end{aligned} \tag{5}$$

我们选择两个正定阵:

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

相应有两个不同的正定函数

$$V_1(x)=x^\tau P_1x=x_1^2+x_2^2;$$
$$V_2(x)=x^\tau P_2x=x_1^2+2x_2^2.$$

进一步, 令 $\alpha_i(x)=-\dfrac{1}{2}g^\tau(x)\left(\dfrac{\partial V_i(x)}{\partial x}\right)^\tau$, $i=1,2$, 则有

$$\alpha_1(x)=-(x_1^2+2x_1x_2-x_2^2),$$

$$\alpha_2(x)=-(x_1^2+3x_1x_3-2x_2^2).$$

利用 $\alpha_i(x)$, Hamilton-Jacobi 不等式 (2) 可记为

$$\begin{aligned}\dot{V}_i(x)&=\frac{\partial V_i(x)}{\partial x}f(x)-\frac{1}{4}K(x)|\alpha_i(x)|^2\\&<-\kappa(\|x\|).\quad(x\neq 0)\end{aligned} \tag{6}$$

容易验证, 不论选择 i 为 $\{1,2\}$ 中哪一个, (6) 不可能对一切 $x\in\mathrm{R}^n$ 都成立. 也就是, 不可能找到 $K(x)$, 使得不等式 (6) 的左边对任给 $x\neq 0$ 都是负数. 因为, 任给 $i\in\{1,2\}$, $\alpha_i(x)=0$ 都有一个非平凡的零点集合. 例如, $i=1$, $\alpha_1(x)=(x_1+x_2)^2-2x_2^2$, $\mathcal{L}_1=\{x\in\mathrm{R}^2;x_1=(\sqrt{2}-1)x_2\}\subset\mathrm{R}^2$ 是一个非平凡 $\alpha_1(x)$ 的零点集合. 如取 $x_1=\sqrt{2}-1, x_2=1$, 那末 $\alpha_1(x)=0$. 简单计算可知, 当 $x(\neq 0)\in\mathcal{L}_1$, $|\alpha_1(x)|^2=0$, 而 (6) 式的第一项 $\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}f(x)>0$. 因此, 不可能找到 $K(x)$, 使得不等式 (6) 的左边是负数. 但是进一步分析, 我们可以发现这样一个事实: 虽然对每一个确定的 $i, \alpha_i(x)$, 不能使 (6) 对一切 $x\in\mathrm{R}^2$ 都成立. 但对任给 $x\in\mathrm{R}^2$, 有一个邻域 U_x, 在 $\{1,2\}$ 中至少有一个指标, 使得 $\alpha_i(x)\neq 0$. 因此在 U_x 上 $|\alpha_i(x)|>0$. 那末我们利用这个 $\alpha_i(x)$, 并适当选择 $K(x)$ 使得 (6) 在 U_x 上成立.

令 $\mathcal{L}_i:=\{x\in\mathrm{R}^2;\alpha_i(x)=0\}$ 为 $\alpha_i(x)$ 的零点集合, 那末容易验证 $\bigcap\limits_{i=1}^{2}\mathcal{L}_i=\{0\}$. 亦即, 只有原点是它们的公共根. 令

$$u(x)=-K(x)\alpha(x). \tag{7}$$

其中 $\alpha(x)=\alpha_j(x)$ 如果 $|\alpha_j(x)|=\max\{|\alpha_1(x)|, |\alpha_2(x)|\}$, $j\in\{1,2\}$. 则可适当选择 $K(x)$, 使得 (6) 对一切 $x\in\mathrm{R}^2$ 成立. 那末我们将 $\{V_i(x)=x^\tau P_ix,\ x\in\{1,2\}\}$ 称为 (5) 在反馈控制 (7) 下的闭环系统的 Lyapunov 函数集. 这个 Lyapunov 函数集具有重要性质: 任给 $x\in\mathrm{R}^2$, 存在 x 的一个邻域 U_x, 在 U_x 上至少有一个 $V_i(x), i\in\underline{2}$, 满足 Hamilton-Jacobi 不等式 (2).

注 i) (5) 的闭环系统是由状态反馈 $u(x)=$

$-K(x)\alpha(x)$ 构成. 对不同的 x, $\alpha(x)$ 是由 $\{\alpha_i(x), i = 1,2\}$ 中选不同的 $\alpha_i(x)$ 构造而成的. 但不论选中哪一个 i, 它们都是状态反馈控制, 所以可以统一用 (4) 来描述闭环系统. 记 $\bar{f}(x)$ 是闭环系统的向量场, 我们没有要求 $\bar{f}(x)$ 是一个连续向量场, 但 $\dot{V}_i(x)$ 是 x 的连续函数. 例如取 $|\alpha(x)| = \max\{|\alpha_1(x)|, |\alpha_2(x)|\}$. 可以保证 $\dot{V}_i(x)$ 的连续性 (比较 (6) 式).

ii) (2) 式的右边是一个 $\mathcal{K}$- 函数, 它的选择直接关系到如何构造 $K(x)$. 我们可以令 $\kappa(\|x\|) = \varepsilon\|x\|^2, \varepsilon > 0$ 是一个小正数.

iii) 当 $\kappa(\cdot)$, $K(x)$, $\alpha(x)$ 选定以后, 对 (5) 的闭环系统而言, 上述 Lyapunov 函数集 $\{V_i(x) = x^\tau P_i x, x \in \{1,2\}\}$ 具有以下重要性质: 任给 $x \in \mathrm{R}^2$, 存在 x 的一个邻域 U_x , 并在 Lyapunov 函数集 $\{V_i(x), i \in \underline{2}\}$ 中存在一个 $V_i(x)$ 局部地满足 " 渐近稳定性条件 ", 即当 $x \neq 0$

a) $V_i(x) > 0$; b) $\dot{V}_i(x) < 0, \forall x \in U_x$.

对例 1, 我们提出这样一个问题: 如果上述 Lyapunov 函数集存在, 是否意味着 (5) 的闭环系统渐近稳定? 一个更一般的问题是: 如对一个非线性系统, 存在一个 Lyapunov 函数集, 这个系统是否渐近稳定? 这就是本文的主要目的: 证明对一个非线性系统, 如果存在满足一定性质的 Lyapunov 函数集, 那末这个系统是渐近稳定的.

2 数学预备知识

本节我们将引进一些更具体的符号, 概念, 定义, 及需要用的数学命题.

定义 2.1 令 $\mathcal{U} := \{U_i; i \in \mathrm{N}^+\}$ 是 R^n 的一个开子集族, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = \mathrm{R}^n$, 那末 $\mathcal{U}$ 称为是 R^n 的一个开复盖。

令 $\{t_i; i \in \mathrm{N}^+\}$ 及 $\{\bar{t}_i; i \in \mathrm{N}^+\}$ 是二个非负严格增实数序列, 满足以下条件:

i) $t_1 = 0$;

ii) $t_i < \bar{t}_i < t_{i+1}$;

iii) $\lim_{i\to\infty} t_i = \infty$.

记 $T_i = [t_i, \bar{t}_{i+1})$, T_i 是一个半开半闭有限区间, $\{T_i;\ i \in \mathrm{N}^+\}$ 是一个区间序列. 由它的构造可知, 这个区间序列具有以下两个性质:

1) $T_i \bigcap T_{i+1} \neq$ 空集;

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} = [0, \infty)$.

一般地, 若区间序列 $\{T_i;\ i \in \mathrm{N}^+\}$ 满足上述二个条件, 则称之为时间域 $[0, \infty)$ 的一个开复盖.

考察一个非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x). \tag{8}$$

其中 $f(0) = 0$, $f(\cdot)$ 满足局部 Lipchitz 条件.

给定一组正定对角阵 $\{P_j; j \in \underline{\ell}\}$ (ℓ 是一个正整数), 其中 $P_j = \mathrm{diag}\{\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \cdots, \lambda_{jn}\}$, $\lambda_{ji} > 0$, $j \in \underline{\ell}$; $i \in \underline{n}$. 相应地, 存在一组二次型正定函数矩阵集 $\mathcal{V} := \{V_j(x) = x^\tau P_j x,\ j \in \underline{\ell}\}$.

定义 2.2 具有上述构造的正定二次型函数集 $\mathcal{V}$ 称为系统 (8) 的二次型 Lyapunov 函数集, 如果 $\mathcal{V}$ 满足以下条件:

i) 存在 R^n 的一个开覆盖 $\mathcal{U} := \{U_i; i \in \mathrm{N}^+\}$;

ii) 存在一个 $\mathcal{K}$- 函数 $\kappa(\cdot)$

iii) 任给 $x \in \mathrm{R}^n$, 存在 $U_i \in \mathcal{U}$, $i \in \mathrm{N}^+$ 及 $V_{j_i}(x) \in \mathcal{V}$; $j \in \underline{\ell}$; 使得 $V_{j_i}(x)$ 沿着 (8) 的解的时间导数满足, $\forall x \in U_i$

$$\dot{V}_{j_i}(x) = \frac{\partial V_{j_i}(x)}{\partial x} f(x) < -\kappa(\|x\|), \tag{9}$$

且 $\dot{V}_{j_i}(x)$ 是 x 的连续函数.

在稳定性理论中, 为了判别动力系统是渐近稳定的, 要求寻找一个 Lyapunov 函数 $V(x)$ 满足渐近稳定性条件 [2,3,4]. 我们的任务就是利用 Lyapunov 函数集构造出所需要的 Lyapunov 函数.

本文要引用微分流形理论中的一个重要结果, 通常称之为 Poincre 引理. 我们只用其中一个特殊形式 (参阅 [5]), 而它的一般结果的叙述可参阅 [6].

引理 2.1 令 $\rho(x) = (\rho_1(x), \cdots, \rho_n(x))^\tau = \mathcal{P}(x)x$ 是函数值向量, 其中 $\mathcal{P}(x)$ 是一个实值 x 的函数阵. 如果微分形式 $\sum_{i=1}^{n} \rho_i(x)\mathrm{d}x_i$ 满足以下可积性条件:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i}, \quad i, j \in .\underline{n} \tag{10}$$

那末, 在一个包含原点的星状区域内存在一个实的 C^1- 函数 $V(x)$ 满足

i) $V(x) = x^\tau \int_0^1 \rho(\theta x)\mathrm{d}\theta = x^\tau [\int_0^1 \mathcal{P}(\theta x)\mathrm{d}\theta] x$;

ii) $\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} = x^\tau \mathcal{P}(x)$.

3 主要结果

定理 3.1 对非线性系统 (8), 如果存在一个二次型 Lyapunov 函数集, 那末系统 (8) 全局渐近稳定.

证 首先假定系统 (8) 不存在 "有限时间逃逸" (finite-time escape) 现象. 这样, 对任给 $x(0) \in \mathrm{R}^n$ 系统 (8) 有一条解轨道 $\{x(t); t \in [0, \infty)\}$. 我们要利

用二次型 Lyapunov 函数集, 在这条轨道的一个邻域 $U_{x(t)}$ 上构造系统 (8) 的一个 Lyapunov 函数 $V(x)$, 即 $V(0)=0$, 对 $\forall x \in U_{x(t)}$, 它满足以下二个条件:

i) $V(x) > 0$;

ii) $\dot V(x) = \dfrac{\partial V}{\partial x} f(x) < -\kappa(\|x\|)$; $\kappa(\cdot)$ 是一个 $\mathcal{K}$ 函数.

根据有限 Lyapunov 函数集的定义, 对任一轨道, 总可以找到开覆盖 $\mathcal{U}$ 的一个子开覆盖 $\mathcal{U}'$. 它是这条轨道的一个开覆盖. 我们可以用时间域 $[0,\infty)$ 的一个开覆盖来描述这个子开覆盖 $\mathcal{U}'$ 的有关性质. 对轨道 $\{x(t); t\in[0,\infty)\}$ 存在一个时间域的开覆盖 $\mathcal{T} := \{T_i := [t_i, \bar t_{i+1}); i \in \mathrm{N}^+\}$ 满足以下三个条件: 对 $\forall t \in [0,\infty)$,

i) 存在 $i \in \mathrm{N}^+$, 使 $t \in T_i$;

ii) 存在 $U_{k_i} \in \mathcal{U}'(\subset \mathcal{U})$, 使 $x(t) \in U_{k_i}, \forall t \in T_i$;

iii) 存在 $V_{j_i}(x) \in \mathcal{V}$ 使 $\forall x \in U_{k_i}$

$$\dot V_{j_i}(x) = 2x^\tau P_{j_i} f(x) < -\kappa(\|x\|). \tag{11}$$

开覆盖 $\mathcal{T}$ 的构造有一定的随意性, 但对其每一个时间区间 T_i, 上述三个性质必须同时成立.

固定 $i \in \mathrm{N}^+$ 考察一段轨道 $\{x(t); t \in T_i = [t_i, \bar t_{i+1})\}$, 则相应存在开集 U_{k_i} 及二次型函数 $V_{j_i}(x)$. 在 U_{k_i} 内可以找到一个开子集 $\Omega_{i0} \subset U_{k_i}$, 使 $x(t) \in \Omega_{i0}, \forall t \in [t_i, \bar t_{i+1})$, 而且 $x(\bar t_i)$, $x(t_{i+1}) \in \partial(\Omega_{i0})$, 这儿 $\partial(\cdot)$ 表示一个开集合的边界点全体.

根据 $V_{j_i}(x)$ 的选择原则, (11) 对一切 $x(t) \in \Omega_{i0}$ 成立.

图 1 轨道 $\{x(t); t \in T_i := [t_i, \bar t_{i+1})\}$ 的开覆盖

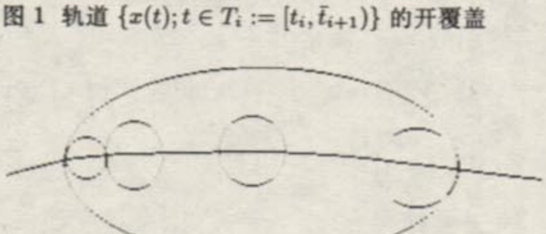

图 2 轨道 $\{x(t); t \in [t_{i1}, t_{in})\}$ 的一组覆盖

再看下一段轨道 $\{x(t); t \in T_{i+1} = [t_{i+1}, \bar t_{i+2})\}$ 同样, 相应地存在开集 $U_{k_{i+1}}$ 及二次型函数 $V_{j_{i+1}}(x)$. 我们还可以定义一个开集 $\Omega_i \subset U_{k_i} \bigcap U_{k_{i+1}}$ 使 $x(t) \in \Omega_i$ $\forall t \in [t_{i+1}, \bar t_{i+1})$. 而且 $x(\bar t_{i+1})$, $\bar x(t_{i+1}) \in \partial(\Omega_i)$. 那末根据 Lyapunov 函数集的定义及连续性质, $\forall x(t) \in \bar\Omega_i$ 以下二式应同时成立:

$$\begin{aligned} &\dot V_{j_i}(x) = 2x^\tau P_{j_i} f(x) < -\kappa(\|x\|), \\ &\dot V_{j_{i+1}}(x) = 2x^\tau P_{j_{i+1}} f(x) < -\kappa(\|x\|). \end{aligned} \tag{12}$$

在轨道段 $\{x(t); t \in [t_{i+1}, \bar t_{i+1})\}$ 的一个邻域 $\bar\Omega_i$ 上, 有 Lyapunov 函数集中二个正定二次型函数同时局部地满足渐近稳定条件 (11). 任给一个正整数 $M \ge 2$, 令 $\rho_k = \dfrac{k-1}{M}, k \in \underline{M}$ 定义

$$\begin{aligned} V_{j_ik}(x) &= x^\tau\left((1-\rho_k)P_{j_i} + \rho_k P_{j_{i+1}}\right)x \\ &= x^\tau P_{j_i,k} x. \end{aligned} \tag{13}$$

因为 $P_{j_i}, P_{j_{i+1}}$ 都是正定对角阵, 则它们的凸组合, $P_{j_ik} := (1-\rho_k)P_{j_i} + \rho_k P_{j_{i+1}} > 0$, 也是正定对角阵.

若我们将区间 $[t_{i+1}, \bar t_{i+1})$ 分成 M 个等间隔子区间 $[t_{ik}, t_{i,k+1})$, 其中 $t_{ik} = t_{i+1} + \rho_k(\bar t_{i+1} - t_{i+1})$, $k \in \underline{M}$, (13) 式则意味着 $\forall x \in \bar\Omega_i$, $\forall k \in \underline{M}$

$$\dot V_{j_ik}(x) = 2x^\tau P_{j_ik} f(x) < -\kappa(\|x\|). \tag{14}$$

记 $P_{j_ik} = \mathrm{diag}\{\lambda_{j_ik1}, \cdots, \lambda_{j_ikn}\}$, $\Omega_{ik}(\subset \Omega_i)$ 是轨道段 $\{x(t); t \in (t_{ik}, t_{ik+1})\}$ 的一个开邻域且满足 $x(t_{ik})$, $x(t_{ik+1}) \in \partial(\Omega_{ik})$.

在 Ω_{ik} 上构造一个对角正定函数阵

$$\mathcal{P}_{ik}(x) := \mathrm{diag}\{p_{ik1}(x), p_{ik2}(x), \cdots, p_{ikn}(x)\}. \tag{15}$$

其中, $l \in \underline{n}$,

$$p_{ikl}(x) = \lambda_{j_ikl} + \frac{x_l - x_{ikl}}{x_{i,k+1,l} - x_{ikl}}(\lambda_{j_i,k+1,l} - \lambda_{j_ikl}).$$

注意: x_l 是落在 Ω_{ik} 内的状态变向量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^\tau$ 的第 l 个分量, x_l 是变量. 而将位于轨道上的固定状态向量 $x(t_{ik})$, $k \in \underline{M}$, 记为 $x_{ik} = (x_{ik1}, x_{ik2}, \cdots, x_{ikn})^\tau$, $k \in \underline{M}$. 它们都是常值向量, 即 x_{ikl}, $k \in \underline{M}, l \in \underline{n}$ 都是常数.

进一步, 注意到 $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 是对角函数阵, 其主对角线上第 l 个分量 $p_{ikl}(x)$ 是单变量 x_l 的函数. 如果 x 正好落在由 x_{ik} 及 $x_{i,k+1}$ 二个状态为端点的直线段上, $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 是 P_{j_ik} 及 P_{j_ik+1} 的凸组合函数, 其相应正定对角阵的第 l 个特征值落在 $[\lambda_{j_i,k+1,l}, \lambda_{j_ikl}]$ (如果 $\lambda_{j_i,k+1,l} < \lambda_{j_ikl}$) 之间. 令 $\lambda_{\max} := \max\{\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_n}, j \in \underline{l}\}$, $\lambda_{\min} := \min\{\lambda_{j_1}, \cdots, \lambda_{j_n}, j \in \underline{l}\}$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 只要 M 充分大, 由连续性条件, 总存在这样的邻域 Ω_{ik} 使得 $\forall x \in \Omega_{ik}$, $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 的特征值落在 $[\lambda_{\min} - \epsilon, \lambda_{\max} +$

$\epsilon](\lambda_{\min}-\epsilon > 0)$ 之间. 如果 ϵ 充分小, 只要作一些简单技术处理, 例如构造一个 $\mathcal{K}$- 函数 $\kappa'(\|x\|)$, $\forall x \in \Omega_{ik}$,

$$2x^\tau \mathcal{P}_{ik}(x)f(x) \le -\kappa'(\|x\|).$$

为简化符号，我们仍记为

$$2x^\tau \mathcal{P}_{ik}(x)f(x) \le -\kappa(\|x\|).$$

这并不失一般性，因为 $\kappa(\|x\|)$ 原本就是任选的 $\mathcal{K}$-函数. 对每一个 $k \in \underline{M}$ 构造 $\mathcal{P}_{ik}(x)$, 最终可以沿着轨道 $\{x(t); t \in [t_i, \bar{t}_{i+1})\}$ 构造一个函数阵

$$\mathcal{P}_i(x) = \begin{cases} \mathcal{P}_{ji}(x), & x \in \Omega_{ik} \bigcup \{x(\bar{t}_i)\}, \\ \mathcal{P}_{ik}(x), & x \in \Omega_{ik} \bigcup \{x(t_{ik})\},\ k \in \underline{M}. \end{cases}$$

令 $\tilde{U}_i := \{x(\bar{t}_i)\} \bigcup_{k=0}^{M} \Omega_{ik} \bigcup \{x(t_{ik})\}$, 它是轨道 $\{x(t); t \in [t_i, \bar{t}_{i+1})\}$ 的一个邻域. $\mathcal{P}_i(x)$ 是 $\tilde{U}_i$ 上的连续函数. 而且 $\forall x \in \tilde{U}_i$, $2x^\tau \mathcal{P}_{ik}(x)f(x) \le -\kappa(\|x\|)$.

对 $i = 1,2,3,\cdots$, 重复上述过程, 最终在 $U_{x(t)} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \tilde{U}_i$ 上构造出一个正定对角阵 $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_i(x)$; $x \in \tilde{U}_i$, $i \in \mathrm{N}^+$.

用 (15) 式构造实值函数阵 $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 时, 我们要求对任给 $l \in \underline{n}$, $x_{i,k+1,l} - x_{i,k,l} \neq 0$. 如果解轨道 $x(t)$ 的第 l_1 个分量, 当 $t = t_{ik}$ 及 $t = t_{i,k+1}$ 时, 有 $x_{i,k+1,l_1} - x_{i,k,l_1} = 0$ 那末可能发生两种情况：

第一, 当 $t \in [t_{ik}, t_{i,k+1}]$, $x_{l_1}(t) \neq$ 常数, 则我们可以适当改变 t_{ik} 的选择, 以避免 $x_{i,k+1,l_1} - x_{i,k,l_1} = 0$ 的发生；

第二, 当 $t \in [t_{ik}, t_{i,k+1}]$, $x_{l_1}(t) =$ 常数, 这意味着

$$\dot{x}_{l_1}(t) = f_{l_1}(x(t)) = 0, \quad \forall t \in [t_{ik}, t_{i,k+1}]. \tag{16}$$

如果 (16) 成立, 则容易看出 $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 主对角线上第 l_1 个分量 $\mathcal{P}_{ikl_1}(x)$ 的取值不影响 $x^\tau \mathcal{P}_{ik}(x)f(x)$. 亦即

$$x^\tau \mathcal{P}_{ik}(x)f(x) = \sum_{l \neq l_1, l=1}^{n} x_l \mathcal{P}_{ikl_1}(x) f_l(x).$$

当 (16) 发生时, 我们可以用正定矩阵

$$\mathcal{P}'_{j,k+1}(x) := \mathrm{diag}\{\lambda_{j_ik+1,1}, \lambda_{j_ik+1,2}, \cdots, \lambda_{j_ik,l}, \cdots, \lambda_{j_ik+1,n}\}$$

来替代

$$\mathcal{P}_{j,k+1}(x) := \mathrm{diag}\{\lambda_{j_ik+1,1}, \lambda_{j_ik+1,2}, \cdots, \lambda_{j_ik+1,l}, \cdots, \lambda_{j_ik+1,n}\},$$

然后用 (15) 式再构造一个 $\mathcal{P}'_{ik}(x)$. $\mathcal{P}'_{ik}(x)$ 与 (15) 式构造出来的 $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 的差别仅仅在于其第 l_1 个分量. $\mathcal{P}'_{ik}(x)$ 第 l_1 个分量是一个常数, 即：

$$\mathcal{P}'_{ikl_1}(x) = \lambda_{j_ikl_1} \quad \mathcal{P}'_{ikl}(x) = \mathcal{P}_{ikl}(x) \ \ (l \neq l_1). \tag{17}$$

这样, 我们可以保证所构造的矩阵 $\mathcal{P}_{ik}(x)$ 沿着轨道的连续性. 我们排除这样一种情况可能发生：轨道 $x(t)$ 从某时刻 $\bar{t}$ 起, 其第 l_1 个分量 $x_{l_1}(t) =$ 常数 $(t \ge \bar{t})$ 这种情况最终会导致与 (11) 的矛盾. 对此我们放在后面讨论.

但另一种可能发生的糟糕情况是：当 $t \in [t_{i,M-1}, t_{iM}) \bigcup [t_{iM}, \bar{t}]$, $(t_{iM} < \bar{t} < \infty)$, 有 $x_{l_1}(t) =$ 常数. 而且当 $t \ge t_{iM}$ 时, $x(t) \notin U_{ik}$.

若我们用 (15) 式构造, 并用 (17) 式作修正而得的矩阵 $\mathcal{P}'_{iM}(x)$, 在 $x_{iM} = x(t_{iM})$ 点对应的正定矩阵 $\mathcal{P}'_{iM}(x_{iM}) = P'_{iM}$ 未必能在 $U_{k_{i+1}}$ 上仍满足 (11) 式. 所幸的是, 如果 $x(t)$ 的第 l_1 个分量在当 $t \in [t_{iM}, \bar{t}]$ 时 $x_{l_1}(t) =$ 常数, 而且 $t > \bar{t}$ 时 $x_{l_1}(t) \neq x_{l_1}(\bar{t})$. 那末根据前述的理由, 只要 x 落在轨道上, 即 $x \in \{x(t),\ t \in [t_{im}, \bar{t})\}$, (11) 仍能成立. 由连续性条件, 那末存在一个这段轨道的开邻域 $U'_{k_{i+1}}$, 当 $x \in U'_{k_{i+1}}$ 时, (11) 亦应成立. 这意味着在 $U'_{k_{i+1}} \bigcap U_{k_{i+1}}$ 上至少有二个不同的正定矩阵 P'_{iM} 及 $P_{j_{i+1}}$ 使 (11) 成立. 这样我们的构造程序就可以应用.

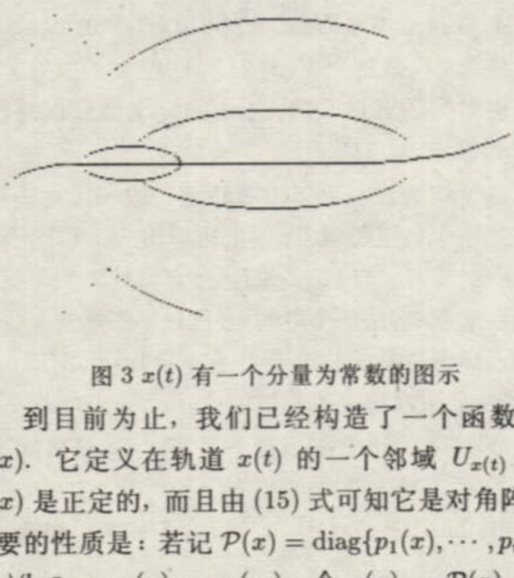

图 3 $x(t)$ 有一个分量为常数的图示

到目前为止, 我们已经构造了一个函数矩阵 $\mathcal{P}(x)$. 它定义在轨道 $x(t)$ 的一个邻域 $U_{x(t)}$ 上. $\mathcal{P}(x)$ 是正定的, 而且由 (15) 式可知它是对角阵. 更重要的性质是：若记 $\mathcal{P}(x) = \mathrm{diag}\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\}$ 则 $\forall l \in \underline{n}$, $p_l(x) = p_l(x_l)$. 令 $\rho(x) = \mathcal{P}(x) \cdot x = (\rho_1(x), \cdots, \rho_n(x)$, 则 $\rho_l(x) = \rho_l(x_l)$, $\forall l \in \underline{n}$. 这样 $\mathcal{P}(x) \cdot x$ 就满足引理 2.1 的可积性条件 (10).

当我们用引理 2.1 构造 $V(x)$ 时, 我们需要将 $\mathcal{P}(x)$ 的定义域扩张到从原点出发的一个星状 (扇形

状) 区域内. 但至今我们的 $\mathcal{P}(x)$ 仅在 $x(t)$ 的一个邻域内有定义. 首先, 我们排除这样一种可能性: 轨道 $x(t)$ 从某一时刻 $\bar{t}$ 起, 它落在从原点出发的一条趋于无穷的直线上. 这样, 当 $t \ge \bar{t}$, $\dot{x}(t) = f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)^\tau$ (常数向量), 而且 $f_i \ge 0, i \in \underline{n}$, 这与 (11) 式矛盾. 排除了这种情况, 对给定 $x \in \Omega_{ik}$, 我们定义: $\theta \in [0,1]$ 并令 $\bar{x} = \bar{\theta} x \in \partial(\Omega_{ik})$. 如果 $\theta x \in \bar{\Omega}_{ik}$,

$$\mathcal{P}(\theta x) := \mathcal{P}(\theta x)$$

如果 $\theta x \notin \bar{\Omega}_{ik}$,

$$\mathcal{P}(\theta x) := \theta x^\tau \rho(\bar{x})$$

它是常数正定阵. 这样 $\rho(\theta x)$ 对 $\theta \in [0,1]$ 都有定义. 亦即我们将 $\rho(x)$ 的定义域扩张到一个星状区域 $\mathcal{CO}_{ik} := \{\theta x; x \in \bar{\Omega}_{ik}, \theta \in [0,1]\}$ 上. 对 $\forall x \in \Omega_{ik}$, 构造一个函数 $V(x) = x^\tau \int_0^1 \rho(\theta x) d\theta = x^\tau \left(\int_0^1 \mathcal{P}(\theta x) d\theta\right) x$. 因为 $\forall \theta \in [0,1]$, $\mathcal{P}(\theta x) > 0$, 则 $V(x) > 0$.

图 4 将 $\rho(x)$ 的定义域扩张到以原点为顶的星状区域

注意: 构造这个 $V(x)$ 时, $V(x)$ 是定义在 $\mathcal{CO}_{ik}$ 上. 但对问题有意义的 $V(x)$ 的定义域仅仅是轨道的一个邻域 $x \in \bar{\Omega}_{ik}$.

这个构造过程可以沿着轨道一段一段地进行, 一直到整个轨道邻域 $U_{x(t)}$ 上构造出一个 C^1 正定函数 $V(x)$. 在 Ω_{ik} 与 Ω_{ik+1} 的连接点可处理为 $\dot{V}(x)$ 的可去连续点. 它是一个可列集, 所以不影响对 $\dot{V}(x)$ 的积分. 那末对系统轨道 $x(t)$ 有 $V(x) > 0$, $\dot{V}(x) < 0$, 即 $x(t)$ 是渐近稳定的轨道.

我们可以证明在定理条件下 " 有限时间逃逸 " 现象不可能发生. 如果有 $x(0) = x_0$, 在 T 时刻发生 $\lim_{t \to T^-} \|x(t)\| = \infty$. 那末我们构造 $\{t_i\}$ $\{\bar{t}_i\}$, $i \in \mathrm{N}^+$, 使 $t_i < \bar{t}_i < t_{i+1}$ 且 $\lim\limits_{i \to \infty} t_i = T$ 那末 $\{T_i = [t_i, \bar{t}_{i+1}), i \in \mathrm{N}^+\}$ 称为 $[0,T)$ 一个开覆盖区间序列. 它满足 (a) $T_i \bigcap T_{i+1} \ne$ 空集; (b) $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i = [0,T)$.

采用上述相同方法, 在轨道 $\{x(t);\ t \in [0,T)\}$ 的邻域 $U_{x(t)}$ 上, 构造一个正定函数 $V(x)$ 使

$$\dot{V}(x) = 2x^\tau \mathcal{P}(x) f(x) \le -\kappa(\|x\|) \quad \forall t \in [0,T).$$

这意味着 $\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\min\{\lambda_{ji}; i \in \underline{n},\ j \in \underline{\ell}\} \|x(T-\epsilon)\|^2 \\ \le\ & V(x(T-\epsilon)) \le V(x_0). \end{aligned}$$

这显然与 $\lim\limits_{t \to T} \|x(t)\| = \infty$ 矛盾.

最后我们排除这样的轨道 $x(t)$, 其第 l_1 个分量 $x_{l_1}(t) =$ 常数, 当 $t > \bar{t}$ 存在的可能性. 因为我们讨论的是自治系统, 故不失一般性, 可令初始时刻为 $\bar{t} = t_0 = 0$. 因为 $\dot{x}_{l_1}(t) = 0$, $\forall t \ge 0$, 则可以讨论一个 $n-1$ 维系统, 其状态向量记为

$$\hat{x}(t) = (x_1(t), \cdots, x_{l_1-1}(t), x_{l_1+1}(t), \cdots, x_n(t))$$

即 $x_{l_1}(t)$ 不予考虑. 在定理条件下, 这个 $n-1$ 维系统的轨道 $\hat{x}(t) \to 0$. 但 $x_{l_1}(t) =$ 常数 $\ne 0$. 令 $x_{l_1}(0) = \delta$, 当 $\|\hat{x}(t)\|$ 充分小, (11) 式的左边 $\|2x^\tau \mathcal{P}_{ji}(x) f(x)\|$ 可以充分接近于零. 例如 $|2x^\tau \mathcal{P}_{ji}(x) f(x)| < \kappa(\delta)$. 但 (11) 式的右边, 根据 $\mathcal{K}$- 函数的性质, $-\kappa(\|x(t)\|) \le -\kappa(\delta)$. 那末与 (11) 式矛盾.

这样我们完成了定理 3.1 的全部证明.

4 结论

本文将 Lyapunov 函数的概念推广到 Lyapunov 函数集. 它为分析非线性系统的稳定性, 特别是设计反馈控制稳定系统提供了一个强有力的工具 Lyapunov 函数集是由最简单的正定二次型函数组成. 每个函数仅要求它在一个局部区域内满足通常所述的 Lyapunov 稳定性条件本文部分地解决了 Lyapunov 稳定性理论中久未圆满解决的一个核心问题: 如何构造一个满足要求的 Lyapunov 函数问题.

本文要求的 Lyapunov 函数集是由对角, 二次型, 正定阵生成的正定函数组成. 这种函数类有一定的局限性. 如何将函数类推广到更一般的情况还尚待研究.

参考文献

1 Sepulchre R, Jankovic M and Kokotovic P. Constructive Nonlinear Control. London: Springer-Verlag, 1997

2 Vidyasagar M. Nonlinear Systems Analysis. New Jersey: Printice Hall Inc. , 1993

3 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京: 科学出版社, 1988

4 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992

5 徐森林. 流形和 Stokes 定理. 北京: 人民教育出版社, 1983

6 Frank W Warner. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie groups. Berlin/Heidelberg : Springer-Verlag 1983