

系统稳定性与鲁棒性研究的发展*

黄琳 耿志勇 王龙 楚天广

(北京大学系统与控制研究中心力学与工程科学系·北京, 100871)

摘要: 本文从科学发展的角度论述了系统稳定性与鲁棒性发展过程及其必然性. 首先简要论述了从古代到 19 世纪稳定性观念的变迁; 然后论述了稳定性理论的产生及其特征; 进而从现代科技与工程的需要论述了鲁棒性研究的必要性和稳定性与鲁棒性结合的必然性.

关键词: 动态系统; 稳定性; 鲁棒性; 控制

On the Development of Stability and Robustness

Huang Lin Geng Zhiyong Wang Long Chu Tianguang

(Research Center for System and Control, Peking University · Beijing, 100871, P. R. China)

Abstract: In this paper, the developing process and necessity of studying stability and robustness of systems are expounded from the science developing point of view. First, the vicissitudes of stability concept from ancient to 19th century are explained briefly. Then, the establishment of stability theory and its characteristics are discussed. Furthermore the necessity of the robustness study and the inevitability of combining stability with robustness in system study are expounded based on the needs of modern sciences, technology, and engineering.

Key words: dynamic systems; stability; robustness; control

稳定性与鲁棒性是现代系统与控制科学的两个重要的基本概念. 大体上说前者是刻划系统中过程相对初始条件的变化的保持能力, 而后者则说的是过程相对环境或系统本身变化的保持能力. 随着科学技术的发展, 在系统与控制的研究中, 这两个概念实际上已经紧密相连. 当今在系统与控制领域关于鲁棒稳定性或稳定鲁棒性的讨论比比皆是就说明这两个概念的研究是应该也有条件放在一起进行的. 从上个世纪经典稳定性的产生到本世纪末鲁棒稳定性的形成, 其间大约经历了约一百年的时间. 回顾一下这一历史进程, 对于理解今天发展的状况和预测未来的可能发展是很有意义的.

1 稳定观念的萌芽到经典稳定性理论

早在两千年前古代中国的汉朝, 淮南王刘安所著《淮南子·说山训》中曾指出“下轻上重, 则覆必易”. 到了宋朝, 《梦溪笔谈》的作者科学家沈括把这种观察到的事实付诸于应用, 他在《忘怀录》中指出“安车车轮不欲高, 高则摇”. 这是中国古代对稳定与不稳定现象观察得到的结论, 他已经隐含

了后来 Lagrange 关于不稳定平衡的一些思想. 至于类似稳定这个词的出现, 至少可以追述到晋书上所述“行人安稳, 布帆无恙”. 这大概是一千五百年前了. 在西方“stable”一词源出于拉丁文“stabilis”, 是表示坚持或保持的意思. 这些千年以前的说法与观念表现出当时人类对稳定这一概念的最初理解.

稳定性由具有这种最初的理解到形成一门科学理论, 其间经过了一千多年, 促成稳定性理论产生的决定因素来自两个方面, 即工业革命及随后科学技术发展的推动和人类在 19 世纪时对自然科学首先是数学和力学的贡献.

从 18 世纪下半叶到 19 世纪末这一百多年的时间里, 发生了一些具深远影响的事件, 从中人们可以看出稳定性理论产生的必然性.

• J. Watt 1765 年创造性地改进了 Newcomen 发明的蒸气机, 并引发了随后蓬勃发展的工业革命.

• J. L. Lagrange 1780 年出版了《分析力学》, 科学地讨论了平衡位置的稳定性.

• C. Hermite 1856 年建立了关于实多项式对根交错的理论.

• Maxwell 1868 年发表了“论调节器”，讨论了蒸汽机自动调速器与钟表擒纵机构的运动稳定性。

• Cauchy 在 19 世纪对数学分析中所给关于极限的科学定义， $\epsilon - \delta$, $\epsilon - N$ 语言的出现。

• Poincare 在对微分方程定义的积分曲线和天体力学方面的工作。

• Peano, Bendixson 和 Darboux 关于微分方程解对初值及参数连续依赖性的研究。

上述这些重要事件及相关的进展促成了 19 世纪末稳定性理论两个主要方面的形成。

基于常系数线性微分方程解的收敛性与对应的实系数多项式根是否具有负实部的关系。Routh 在 1875 年利用讨论多项式根的 Sturm 组与有理函数的 Cauchy 指数之间的联系，建立了判断实多项式右半平面根个数的算表，从而给出判断稳定性的 Routh 判据。随后 Hurwitz 在 1895 年又独立地采用用多项式系数排成的矩阵的主子式的符号来判断右半平面根的个数和稳定性。他们的工作为稳定性理论研究的代数方法奠定了基础。这种代数方法与复变函数论中关于有理函数在特定区域内零极点估计的理论结合就为近代稳定性判定的频域方法提供了基础。无论是频域方法中的 Nyquist 判据还是由 Hermite 早期工作的启发而由 Gantmacher 等人建立的正多项式对方法，从理论上都是与代数方法一脉相承的。为纪念 Routh 的工作，Inter. J. of Control 在 1975 年专门出了纪念专辑。

大致与代数方法产生的同时，A. M. Lyapunov 在 1892 年发表了其著名的博士论文《运动稳定性一般问题》。他首先按照 Cauchy 关于极限描述的 $\epsilon - \delta$ 语言，将常微分方程解对初值的连续依赖性由有限时间区间拓宽到无穷时间区间，给出了有关稳定、渐近稳定的科学概念；进而他参照力学系统中总能量及其随时间变化的特性在决定平衡位置稳定与否上的作用，引入了后来统称为 Lyapunov 函数的判定函数。利用该函数及其随时间导数的性质，建立了判断一般系统稳定性的一系列定理，从而避开了求解一般微分方程组解的困难。Lyapunov 讨论的系统是一般非线性时变系统，其结论具一般性，可运用于各种类型的系统，因而意义深远。为了纪念这一划时代工作发表一百周年，Int. J. of Control 同样专门出版了纪念专辑。在这一工作发表以后的最初 50 年，其发展主要集中在理论方面，其重要进展有：

从理论上的扩展首先表现在对时变系统稳定性

的认识上。1933 年 Persidski 首先指出稳定性与初始时刻的关系并提出一致稳定的概念。进而 Barbasin 与 Krasovski 提出一致渐近稳定的概念并给出了判据，此时人们才认识到 Lyapunov 关于时变系统渐近稳定的定理实际上已经判定了一致渐近稳定。于是一些人饶有兴趣地企图在 Lyapunov 关于渐近稳定的定理中除去 V 函数的无穷小上界的条件，直到 J. Massera 在 1949 年给出了一个反例，表明在对时变系统不做附加限制时即使证明渐近稳定 Lyapunov 原来的条件也未必可以减弱，这些及一些相关的结果使人们对时变系统稳定性有了更深刻的认识。

同用多项式根判定常系数线性系统零解渐近稳定不同，用 Lyapunov 方法判断系统零解的稳定性实际上只提供了一种充分条件。但对于系数有界的时变线性系统说来，一致渐近稳定、指数渐近稳定和存在满足相关稳定性判定要求的时变二次型 Lyapunov 函数用来判定三者竟是等价的。而对于非线性系统零解的一致渐近稳定，Massera 同样也证明了用来判定的 Lyapunov 函数的存在性。这样便对用 Lyapunov 方法判断对稳定性在一定意义下给出了必要性的结论，使人们对这一方法进一步提高了认识。

理论上的另一种发展是更具方法论性质，针对一类问题将 Lyapunov 函数由一个扩展为几个，在研究问题时互相搭配来判断零解的稳定性。由于系统阶次的增高，针对系统结构上的特征将 Lyapunov 函数由标量函数扩展成向量函数，然后用来判断大系统稳定性则是在本世纪 50 年代以后才发展起来的。这种将一个系统从结构上分解成一些子系统再根据子系统构造合适的 Lyapunov 函数，然后集成起来形成向量 Lyapunov 函数来研究整个大系统的稳定性以及关联稳定性。这类研究在包括电力系统、经济系统中已有了应用。

虽然代数方法与 Lyapunov 方法从理论方法上有明显的区别，但他们讨论的系统即理论研究的客观背景则是在下述同一前提下进行的：

- 1) 描述系统的模式是确定的，不考虑任何人为改变的因素，例如控制。
- 2) 系统中不确定性表现在系统运动的初始条件扰动上。
- 3) 系统是单一给定的，不考虑由于不确定性存在而导致的系统族。

上述三点刻划了经典稳定性理论的主要特征。这样的特征反映了上个世纪物理学研究特点的影响。

正如 K. Marx 在《资本论》第一卷第一版序言中指出的“物理学家是在自然过程表现得最确实、最少受干扰的地方考察自然过程的，或者如有可能，是在保证过程以其纯粹形态进行的条件下从事实验的”。在这种纯粹化与确定论思潮影响下的经典稳定性理论，在本世纪后半叶由于大量工程应用的需求而遇到了挑战。正是经典稳定性理论中没有考虑的控制的作用，广泛存在的不确定和非单一模型的系统的研究，迎合了挑战的需要，使稳定性理论的研究获得了从未有过的发展动力，得到了巨大发展，使其研究队伍一下子由基本上是少数数学家与力学家的圈子扩大到了包括工程科学在内的众多领域。

2 控制对稳定性理论发展的影响

本世纪 30 年代兴起的自动控制技术与理论，深刻地改变了稳定性理论研究的面貌，无论从研究队伍的迅速扩展还是由于控制系统的出现，从研究问题的提法及解决问题的办法都对原稳定性理论是一种突破。这种变化使稳定性理论研究发生的变化与发展都远非稳定性理论形成后的前 50 年所可比拟的。

考虑一个简单的控制系统模式

$$\dot{x} = f(x, u, t), y = g(x, u). \quad (1)$$

其中 x 是系统的状态， u 与 y 分别是系统的输入与输出，控制系统中由于 u 并不是给定的，因而其稳定具有新的特色。

控制系统研究的第一个特点在于人们对其建模时，一般认为输入与输出的信息是最能反映系统动态特性的。至于系统的具体方程式并不一定能弄清楚。适应这种特点，控制系统的稳定性常常用有界输入下是否只对应有界输出刻划。建立在这种刻划之下，系统常被看成一些信号空间之间的算子。在线性系统的情况下，信号理解为时域的，则该算子常用具有一定 Green 函数的积分算子表征；而当信号看为是频域的，则算子常用传递函数这种方式给出，而在信号空间中常常定义一些范数用来进行讨论。这种输入输出稳定性与系统无控制时的零解稳定性的关系，在系统可控又可观测下，对于线性系统说来，结论是清楚的，但对于非线性系统，其研究还是近二十年的事。控制系统的第二个特点在于存在控制。当控制是由系统的状态(或输出)决定时，则称为状态反馈(或输出反馈)，系统的反馈一经确定，例如 $u = K(x, y)$ ，则对应系统(1)就成为

$$\dot{x} = f(t, x, K(x, y)), y = g(x, K(x, y)). \quad (2)$$

此时已经成为无外控制作用的系统。因此对于控制系统说来，稳定性的基本提法就成为：1) 系统在何种条件下可以通过反馈选取使对应系统的零解渐近稳定；2) 系统中反馈部分具体如何求得。上述寻求反馈使系统稳定常称之为镇定。因而上述两问题就变为 1)' 何种条件表明系统是可镇定的；2)' 具体如何镇定。

将镇定思想与输入输出稳定的观念相结合，就发展为现今 H_∞ 鲁棒控制的思想。考虑如图 1 所示的系统，装置 G 的输入区分为扰动 w 和控制 u 。

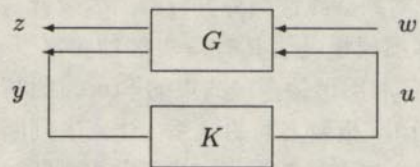


图 1 反馈控制系统方框图

其输出亦区分为输出 z 与测量 y ，此时镇定要求转化为设计 K 使图示系统的每一通道均稳定(即内稳定)，同时要求 w 对系统的影响能低于一事先给定的界，这就是现今 H_∞ 控制研究的出发点。研究控制系统稳定性，其模式的表述方式常常以回路形式表达。最早的回路稳定性的思想是由 Nyquist 在 1928 年提出的。他用装置 G 的频率特性曲线即可断定使闭环稳定的增益 K 应如何选取。这种回路当 K 是一个由输入输出的增益界刻画的非线性函数族 $\phi(t, \sigma)$ 时，则导致从 40 年代起由 Lur'e 与 Postnikov 开创的绝对稳定性的研究。意味深长的是研究绝对稳定性的方法首先并不是回路分析的方法，而是将回路系统用状态空间形式表达并用 Lyapunov 方法加以解决。这种现象和方法几乎延续了整整 20 年，直至 V. M. Popov 提出用频率法同样可以解决绝对稳定性问题，人们此时才深刻地意识到绝对稳定性问题本质上应是归于回路稳定性的。随后，Yakubovich 给出了著名的 Kalman-Yakubovich-Popov 引理，在证明 Lur'e 解与 Popov 解关于绝对稳定性等价的同时，也深刻揭示了绝对稳定性研究中时域方法与频域方法的本质联系。这种研究过程的迂回的一个直接效果是人们认识到在 Lyapunov 方法与回路分析方法之间并不存在天堑，而是有着一种本质的联系，这种本质联系在随后关于严格正实与对应的矩阵方程组求解、 H_∞ 控制与对应的 Riccati 方程求解等对应上均有显著的表现。这种频域方法与时域方法的沟通也促进了控制系统稳定性研究的发展。人们对回路稳定性的研究，在 G 只是一个传递函数时，其结

果十分充分。而当 G 成为一个传递函数矩阵时，无论是镇定问题还是绝对稳定性问题，其结果都还是不够理想的。Megretski 和 Rantzer 发展了绝对稳定性研究中利用输入输出信号增益界刻画系统非线性特性的思想，将系统的非线性特性表示为输入输出信号的积分二次约束 (IQC)，这种方法可将目前已知的许多关于系统动态不确定性的描述纳入统一的框架之下。在此基础上发展起来的稳定性分析的频域方法在继承了绝对稳定性和回路变换频域方法优点的同时，可以处理多输入多输出系统的稳定性分析，并可以转化为线性矩阵不等式 (LMI) 加以求解。目前 IQC 方法虽然在稳定性分析上获得成功，但如何利用该方法解决系统镇定问题，还远没有成功。

3 研究鲁棒性的必然与发展

在控制科学研究的对象——控制系统中，由于种种原因而存在不确定性或摄动，用一个数学模式，例如用一个微分方程组来描述它，总与实际运转的系统存在着差别，这种差别表明用单一的数学模型来刻画系统是不完善的。由于处理问题的能力所限，人们一开始总假定这种不确定性是很微小的。无论是代数方法还是 Lyapunov 方法，所判断的渐近稳定性通常具有“开集”性质，即当无摄动系统是渐近稳定时总能保证存在一个邻域，当不确定性发生在该邻域内时对应的渐近稳定将得到保持。这样只在微摄动假定下渐近稳定的研究不仅可能与实际情况差之甚远，而且其本身也变得意义不大。

控制系统中的不确定性，其产生原因是多种多样的，如何描述这种不确定性如同在控制系统中选取品质指标一样，它应遵循两个基本原则，即它能反映实际问题的特征同时又能便于在研究过程中进行处理。以线性系统为例，摄动可采用下述模式。

参数不确定性。系统中某些参数是不确定的并在一定的集合中取值，例如在矩形体、球形体、多面体内取值等。参数不确定性常称结构性摄动，这是由于这种摄动仅影响参数而不影响系统的结构，即在一定的结构性质的摄动。

非结构性摄动。这种摄动不仅以参数变化形式出现而且系统结构也发生变化。例如用 H_∞ 范数、Gap 度量的摄动。

混合摄动。同时具有结构性与非结构性摄动。

由于系统中存在的摄动是并不清楚的，从研究的角度，我们面对的对象就不是一个单一的对象而

是面对一族对象。这表明一个实际的系统其描述模式可以多个甚至无穷个，或必须用一个系统族来描述同一个实际系统。这种描述由一个名义系统（即摄动为零）和一个摄动模式所组成。鲁棒稳定性就是指一个系统族的稳定性。随着控制系统面临任务的复杂、环境的多变、大量不确定因素的存在，研究系统的鲁棒稳定性就日益成为必需。

最初当 Davison 引入“Robust”这个词时，还是针对微小摄动而言的，而今 Robust 这个概念已经变为针对那些非微小的有界摄动。

微积分的产生已经历了三百多年，人们习惯于用无穷小分析来处理问题。但对于大范围变化下鲁棒稳定性的研究，也只是在出现了新的契机以后才蓬勃发展起来。

鲁棒稳定性分析一开始采用 Lyapunov 函数方法，利用二次型 Lyapunov 函数建立了关于系统族二次稳定的概念并得到了一批结果。特别是当系统满足匹配条件时结果相当丰富。这种方法原则上可以应用于时变非线性系统，但由于方法本质上是一种充分性方法而且对系统族要求具有公共的 Lyapunov 函数，要求难于满足，结果也就偏于保守。在相对热了不足十年即进入停滞不前的状态。尽管仍然有各种与之相近的各种提法下大量论文的出现，但由于 Lyapunov 方法本身还有些关键问题，例如针对系统或系统族什么是最合适的 Lyapunov 函数，和针对系统族是否可同时利用不同的 Lyapunov 函数等一系列问题并未有圆满答案，而实际上在呼唤突破。

激励鲁棒性研究的另一个方面是 H_∞ 控制讨论的深入。 H_∞ 控制的原始提法是设计控制器以使系统内稳定且由于干扰到输出的传递函数对应的 H_∞ 范数为最小，这是一个典型的受约束最优控制问题。正如“人无完人，金无足赤”一样，在实际应用中要求最优控制不仅代价太大而且有时还会带来弊端。工程实际常常要求人们以一种次优控制来实现控制器。当 H_∞ 范数以最大奇异值的方式表现后 H_∞ 次优化问题就同在加权，乘性两种非结构性摄动模式下系统鲁棒镇定联系在一起。这种联系赋予了 H_∞ 控制新的含义，即它也是一种鲁棒控制问题。在 H_∞ 控制理论的发展过程中，一开始它是以算子空间中逼近的方式解决问题的，这种方法在计算上比较困难。后来由于发现 H_∞ 控制的求解依赖于两个 Riccati 方程的求解而使它增添了新的活力，加之 H_∞ 控制本身的提法也非常适合控制回路这种结构上的特征，方法上的可行与工程上的合理就使 H_∞ 控制

成为了现代鲁棒控制的核心问题之一。

作为鲁棒稳定或鲁棒控制的另一主要领域—参数不确定方法,其出现当归功于俄国人 Kharitonov 的贡献.他关于一个区间多项式族是 Hurwitz 稳定的充要条件是该族四个端点多项式为 Hurwitz 稳定的结论,先是给人们带来了惊异,随后则启示人们寻求类似的结果并将它们用之于控制.随后出现的梭边定理,菱形族定理,边界定理,值集或值映射方法等为鲁棒稳定性的分析提供了有效的工具.但这些还基本上限于当系统多项式系数只是不确定参数的仿射函数的情况,对于多仿射与非线性情形,问题则困难得多,完美的便于应用的结果依然吸引着研究者巨大的兴趣.

控制系统的复杂性与不确定性的多样性常要求讨论同时具有上述两种不确定性的问题.与此同时人们乐于把 H_∞ 控制方法与参数不确定方法结合起来处理系统的鲁棒镇定和带品质要求的鲁棒镇定.

运筹学是控制理论的近亲,其方法常常在控制理论研究中起到别开生面的作用.当今大量的鲁棒控制问题已经借助于线性、凸与非线性规划的方法求解.而 Karmarkar 方法在运筹学中大获成功的事例,使人们把这一方法及其发展用于控制特别是鲁棒控制,使控制中大量问题转化为线性矩阵不等式(LMI)求解,从而使 LMI 的作用日益明显.而一些鲁棒控制的新的分支例如积分二次约束 IQC 与鲁棒增益规划(RGP)又都可借助 LMI 来进行研究.关于 LMI 的求解已有现成的算法和软件,但是在理论上 LMI 的可解性问题还远没有解决,特别是控制系统中的许多分析与综合问题经常转化为若干个 LMI 与一个非凸的矩阵秩约束条件下的可行问题,该问题的可解性研究是一个具有挑战性的研究课题.从鲁棒性的观念出发,建立在各种不等式基础上的分析与设计是十分有意义的.

系统鲁棒性的研究中最具核心地位的乃是鲁棒稳定性问题,所幸在稳定性的经典研究中和鲁棒性

的近期研究中,人们可以清楚地发现这两者在理论、概念、方法上的近于一致的现象.因而稳定性与鲁棒性在控制系统理论的构架中是最能亲和而成为一体的.这是由于二者都是处理系统摄动的影响,从前一百年发展的历史可以清楚地看到其中的天然联系.

后记 关肇直教授是我国控制科学的先贤,他生前对于科学发展的形势、科学的源泉在于实践等均富有卓见.他为控制理论应用于国防与工程实际付出了极大的努力,为我们树立了榜样,我们这些后继者为了缅怀他对中国控制科学的贡献,仅以此文奉献以报其于万一.

参考文献

- 1 Lyapunov A M. The General Problem of The Stability of Motion. Math. Soci. of Kharlov, 1892
- 2 黄琳. 稳定性理论. 北京: 北京大学出版社, 1992
- 3 黄琳, 于年才, 王龙. 李雅普诺夫方法的发展与历史性成就. 自动化学报, 1993, 19(5): 587 - 595
- 4 钱令希等. 中国大百科全书(力学卷). 北京: 中国大百科全书出版社, 1985
- 5 Rouche N, Habets P and Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. Springer-Verlag, 1977
- 6 Inte. J. of Control. (纪念 Lyapunov 博士论文发表一百周年专辑), 1992, 55(3)
- 7 Inter. J. of Control. (纪念 Routh 著名论文发表一百周年专辑), 1977, 26(2)
- 8 Hartman P. Ordinary Differential Equations. Boston: Birkhäuser, 1982
- 9 Green M and Limebeer D J N. Linear Robust Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995
- 10 Barmish B R. New Tools for Robustness of Linear Systems. New York: Macmillan Publishing Com., 1994
- 11 Boyd S, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory. SIAM, Philadelphia, 1994
- 12 Megreski M and Rantzer A. System analysis via integral quadratic constraints. IEEE Trans. Automat. Contr., 1997, 42: 819 - 830