线性切换系统的能控性和能达性 *

谢广明　郑大钟

(清华大学自动化系 · 北京，100084)

摘要：本文针对一般线性切换系统，严格定义了系统的能控性、能达性和能控集、能达集，导出了能控性的一个必要条件，给出了三维单输入双切换系统能控性的充分必要条件，并指出现有文献中有关结论的一个错误.

关键词：线性切换系统；能控性；能达性

Controllability and Reachability of Linear Switching Systems

Xie Guangming　Zheng Dazhong

(Department of Automation, Tsinghua University · Beijing, 100084, P.R. China)

Abstract: To linear switching systems, give the definition of controllability and reachability , the controllable set and the reachable set of the system,which leads to the necessary condition of controllability naturally,.also give the sufficient and necessary condition of controllability of 3-dimension single input twofold linear switching systems.

Key words: linear switching systems; controllability; reachability

1 引言

混合动态系统 (Hybrid Dynamic System , HDS) 是同时包含连续时间变量和离散事件变量的复杂系统，具有广泛的工程背景. 切换系统 (Switching System , SS) 通过在多个系统之间进行适当切换，以实现一定的性能要求，可以看作是多模型系统或变结构系统的推广. 切换系统作为混合动态系统理论中一类有影响的重要的模型，已日益受到国内外学者的广泛重视，但至今有关能控性和能观性的结果还很少.

一般的，线性切换系统的状态空间模型为：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{\alpha(t)}x + B_{\alpha(t)}u, \\ y &= C_{\alpha(t)}x. \end{aligned} \tag{1}$$

其中， x 为 n 维状态向量， u 为 p 维输入向量， y 为 q 维输出向量， $\alpha(t):[0,+\infty)\mapsto\{1,2,\cdots,N\}$, 为分段常值函数 A_i,B_i,C_i 均为相应维数的常阵，一组 (A_i,B_i,C_i) 称为一个切换模式， N 为全部切换模式的总数.

为了便于描述系统的演变过程，定义切换序列如下：

定义 1 (切换序列)　表 $i_m\in\{1,,2,\cdots,N\}$ 为切换模式序号， $h_m>0$ 为切换模式持续时间，则称 $\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M=\{(i_1,h_1),(i_2,h_2),\cdots,(i_M,h_M)\}$ 为一个切换序列，记为 π ，其中 M 表示了切换序列的长度.

定义 2 (切换序列集合)　长度为 M 的切换序列的全部组成切换序列集合，记为 $\Pi(M)$.

对于给定的一个切换系统，当给定初始时刻 t_0 和一个切换序列 π 后，切换模式的变化过程就完全确定. 即，在 $[t_0+\sum\limits_{l=1}^{m-1}h_l, t_0+\sum\limits_{l=1}^{m}h_l)$ 内，切换模式为 $(A_{i_m},B_{i_m},C_{i_m})$ ， $\forall m=1,2,\cdots,M$.

对于线性切换系统能控性和能观性已经得到了一定的研究结果 . [1] 限于讨论周期型切换系统的能控性和能观性，给出了一种特殊的能控性的定义和相应的充分必要条件 . [2] 给出了非周期系统的能控性的一个充分性条件和一个必要性条件. 本文推广了现有的研究，针对一般形式的切换系统，对系统的能控性和能达性进行了严格的定义，在此基础之上给出了能控集和能达集的概念. 并且，进而讨论了系统能控性和能达性之间的关系，建立了三维单输入双切换系统能控性的充分必要条件. 这个结果

* 国家自然科学基金与攀登项目资助项目.

修正了 [2] 中有关结论.

2 线性切换系统的能控性和能达性

定义 3（状态能控性） 对由（1）定义的线性切换系统，如果对给定时刻 t_0 的非零初始状态 x_0，存在一个切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$，使得状态由 t_0 转移到时刻 $t_f=t_0+\sum_{l=1}^M h_l$ 时，$x(t_f)=0$，则称状态 x_0 在 t_0 时刻能控.

定义 4（完全能控性） 如果定义 3 中，任意非零状态在 t_0 时刻均为能控，则称系统在 t_0 时刻为完全能控.

定义 5（一致完全能控性） 如果定义 4 中，系统在任意时刻均为完全能控，则称系统为一致完全能控.

定理 1 对由（1）定义的线性切换系统，若系统为完全能控，则其必为一致完全能控.

证明：不失一般性，令系统在 t_0 时刻为完全能控，下证系统在任意时刻 t_1 也为完全能控.

由定义，对任意非零状态 x_0，因其在时刻 t_0 能控，则存在切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$ 和无约束容许控制 $u(t)$，使时刻 $t_f=t_0+\sum_{l=1}^M h_l$ 时，状态 $x(t_f)=0$. 对时刻 t_1，仍取切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$ 和无约束容许控制 $v(t)$，且满足 $v(t)=u(t-t_1+t_0)$，易知有 $x(t_1+\sum_{l=1}^M h_l)=0$，表明状态 x_0 在 t_1 时刻为能控. 再由 x_0 的任意性，即知系统在时刻 t_1 为完全能控. 由 t_1 的任意性，这就证明了系统为一致完全能控. 证明完成.

定义 6（状态能达性） 对由（1）定义的线性切换系统，如果给定一个时刻 t_0 和一个非零状态 x_0，存在一个切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$ 和一个无约束的容许控制 $u(t)$，以及有限时刻 $t_f=t_0+\sum_{l=1}^M h_l$，使状态由 $x(t_0)=0$ 转移到 $x(t_f)=x_0$，则称状态 x_0 在 t_0 时刻为能达.

定义 7（完全能达性） 如果定义 6 中，任意非零状态在 t_0 时刻均为能达，则称系统在 t_0 时刻为完全能达.

定义 8（一致完全能达性） 如果定义 7 中，系统在任意时刻均为完全能达，则称系统为一致完全能达.

基于类似于定理 1 的证明过程，可得到如下结论：

定理 2 对由（1）定义的线性切换系统，若系统为完全能达，则其必为一致完全能达.

由线性系统理论熟知，对定常系统，状态能达性与能控性为等价. 线性切换系统实质上是属于时变系统，状态能达性与能控性的等价性一般不能直接定论，有待于进一步分析.

根据定理 1 和 2，对由（1）定义的线性切换系统，能控性和能达性等价于一致能控性和一致能达性，因此以下只考虑 $t_0=0$ 时的能控性和能达性.

3 线性切换系统的能控集和能达集

现来引入能控集和能达集的概念. 为便于叙述，先给出一些有关的概念和性质.

定义 9（列空间） 矩阵 $B_{n\times p}$ 的列空间为 R^n 中如下定义的一个线性空间：

$$R(B)=\{Bx|x\in\mathrm{R}^p\}. \tag{2}$$

定义 10（循环不变子空间） 对矩阵 $A_{n\times n}$ 和 R^n 中线性子空间 $\mathbf{W}$，称如下的一个线性空间

$$\langle A|\mathbf{W}\rangle=\mathbf{W}+A\mathbf{W}+\cdots+A^{n-1}\mathbf{W} \tag{3}$$

为子空间 $\mathbf{W}$ 经矩阵 A 循环而生成的 A 的不变子空间.

显然不变子空间满足如下的关系：

$$\forall k, A^k\mathbf{W}\subseteq\langle A|\mathbf{W}\rangle,$$
$$\forall h\in\mathrm{R}, \exp(Ah)\mathbf{W}\subseteq\langle A|\mathbf{W}\rangle.$$

引理 1 给定矩阵 $A_{n\times n}, B_{n\times p}$，则对 $\forall t_0,t_f,t_f>t_0\geq 0$，有

$$\begin{aligned}&\{x|x=\int_{t_0}^{t_f}\exp(A(t_f-s))Bu(s)\mathrm{d}s,\\&\quad u\text{为所有容许控制}\}\\&=\langle A|R(B)\rangle.\end{aligned} \tag{4}$$

此引理的证明类似于 [3] 的定理 7.8.1(P353)，限于篇幅，此略.

下面，给出能达集和能控集的构造. 给定一个切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$，则由 $x_0=0$ 出发的能达状态所构成的集合为

$$S_0(\pi)=\Big\{x|x=\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_2}h_2)\int_0^{t_1}\exp(A_{i_1}(t_1-s))B_{i_1}u_1(s)\mathrm{d}s$$
$$+\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_3}h_3)\int_{t_1}^{t_2}\exp(A_{i_2}(t_2-s))B_{i_2}u_2(s)\mathrm{d}s+\cdots$$
$$+\int_{t_{M-1}}^{t_M}\exp(A_{i_M}(t_M-s))B_{i_M}u_M(s)\mathrm{d}s,\quad u_1,u_2,\cdots,u_M\text{为所有允许控制}\Big\}. \tag{5}$$

其中，$t_i=\sum\limits_{l=1}^{i}h_l, i=1,2,\cdots,M$. 据引理 1，又有

$$S_0(\pi)=\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_2}h_2)\langle A_{i_1}|R(B_{i_1})\rangle$$
$$+\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_3}h_3)\langle A_{i_2}|R(B_{i_2})\rangle+\cdots+\langle A_{i_M}|R(B_{i_M})\rangle. \tag{6}$$

于是，通过对所有切换序列构造能达集，系统的能达集就为 $S_0=\bigcup\limits_M\bigcup\limits_{\pi\in\Pi(M)}S_0(\pi)$. 类似地，对切换序列 π，能控集为

$$T(\pi)=\Big\{x|0=\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_1}h_1)x$$
$$+\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_2}h_2)\int_0^{t_1}\exp(A_{i_1}(t_1-s))B_{i_1}u_1(s)\mathrm{d}s$$
$$+\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_3}h_3)\int_{t_1}^{t_2}\exp(A_{i_2}(t_2-s))B_{i_2}u_2(s)\mathrm{d}s$$
$$+\cdots$$
$$+\int_{t_{M-1}}^{t_M}\exp(A_{i_M}(t_M-s))B_{i_M}u_M(s)\mathrm{d}s,\quad u_1,u_2,\cdots,u_M\text{为所有允许控制}\} \tag{7}$$
$$=\{x|x=\exp(-A_{i_1}h_1)\int_0^{t_1}\exp(A_{i_1}(t_1-s))B_{i_1}u_1(s)\mathrm{d}s$$
$$+\exp(-A_{i_1}h_1)\exp(-A_{i_2}h_2)\int_{t_1}^{t_2}\exp(A_{i_2}(t_2-s))B_{i_2}u_2(s)\mathrm{d}s$$
$$+\exp(-A_{i_1}h_1)\exp(-A_{i_2}h_2)\cdots\exp(-A_{i_M}h_M)\int_{t_{M-1}}^{t_M}\exp(A_{i_M}(t_M-s))B_{i_M}u_M(s)\mathrm{d}s,$$
$$u_1,u_2,\cdots,u_M\text{为所有允许控制}\Big\}, \tag{8}$$

据引理 1 及列空间的有关性质，可知

$$T(\pi)=\langle A_{i_1}|R(B_{i_1})\rangle+\exp(-A_{i_1}h_1)\langle A_{i_2}|R(B_{i_2})\rangle+\cdots$$
$$+\exp(-A_{i_1}h_1)\exp(-A_{i_2}h_2)\cdots\exp(-A_{i_{M-1}}h_{M-1})\langle A_{i_M}|R(B_{i_M})\rangle \tag{9}$$

通过对所有切换序列构造能控集，系统的能控集就为 $T=\bigcup\limits_M\bigcup\limits_{\pi\in\Pi(M)}T(\pi)$.

能控性、能达性与能控集、能达集之间的关系可归结为如下定理：

定理 3 对如（1）所定义的系统，状态 x 能控 $\Leftrightarrow x\in T$；状态 x 能达 $\Leftrightarrow x\in S_0$.

定理 4 对如（1）所定义的系统，系统为完全能控 $\Leftrightarrow T=\mathrm{R}^n$; 系统为完全能达 $\Leftrightarrow S_0=\mathrm{R}^n$.

两个定理的正确性显然．此略．

定理 5 对如（1）所定义的系统，给定切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$，由 π 的前 $M-1$ 项构成 $\pi':\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^{M-1}$，则

$$S_0(\pi)=\exp(A_{i_M}h_M)S_0(\pi')+\langle A_{i_M}|R(B_{i_M})\rangle. \tag{10}$$

定理 6 给定切换序列 $\pi:\{(i_m,h_m)\}_{m=1}^M$，则其能达集和能控集之间成立：

$$S_0(\pi)=\exp(A_{i_M}h_M)\exp(A_{i_{M-1}}h_{M-1})\cdots\exp(A_{i_1}h_1)T(\pi). \tag{11}$$

由定义可直接证明定理 5,6. 此略．

注 考虑到矩阵指数阵为非奇异，定理 6 中的关

系式表明，能控集和能达集有确定的对应关系.

4 三维单输入双切换系统能控性的充要条件

对于一般的线性切换系统，其能控性的充分必要条件至今尚未得到. 本节中，就 $n=3$ ， $N=2$ 的单输入系统，来给出完全能控的充分必要条件.

作为准备知识，首先对一般线性切换系统来归纳定义一个线性子空间 $\mathbf{W}$，令

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1 &=\langle A_1|R(B_1)\rangle + \langle A_2|R(B_2)\rangle + \cdots + \langle A_N|R(B_N)\rangle,\\ \mathbf{W}_2 &=\langle A_1|\mathbf{W}_1\rangle + \langle A_2|\mathbf{W}_1\rangle + \cdots + \langle A_N|\mathbf{W}_1\rangle,\\ &\vdots\\ \mathbf{W}_n &=\langle A_1|\mathbf{W}_{n-1}\rangle + \langle A_2|\mathbf{W}_{n-1}\rangle + \cdots + \langle A_N|\mathbf{W}_{n-1}\rangle,\end{aligned}$$

则

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_n.$$

易知，若存在 i ，满足 $\mathbf{W}_i= \mathbf{W}_{i+1}$，则 $\mathbf{W}_i= \mathbf{W}_{i+l}, \forall l$. 并且，显然有 $\mathbf{W}_1 \subseteq \mathbf{W}_2 \subseteq \cdots$，从而 $\dim(\mathbf{W}_1) \le \dim(\mathbf{W}_2) \le \cdots \le n$. 于是， $\exists K \le n$，满足

$$\begin{aligned}&\dim(\mathbf{W}_1) < \cdots < \dim(\mathbf{W}_K)\\ &=\dim(\mathbf{W}_{K+1}) = \cdots\\ &=\dim(\mathbf{W}_n),\end{aligned} \tag{12}$$

即

$$\mathbf{W}_1 \subset \cdots \subset \mathbf{W}_K = \mathbf{W}_{K+1} = \cdots = \mathbf{W}_n. \tag{13}$$

据此性质，可以证明如下的一些推论.

推论 1 线性子空间

$$A_i\langle A_j|R(B_j)\rangle \subseteq \mathbf{W},\ \forall i,j = 1,\cdots,N, \forall h.$$

推论 2 线性子空间

$$\exp(A_i h)\langle A_j|R(B_j)\rangle \subseteq \mathbf{W},\ \forall i,j = 1,\cdots,N, \forall h.$$

推论 3 切换序列的能控集和能达集

$$S_0(\pi), T(\pi) \subseteq \mathbf{W},\ \forall 切换序列\pi.$$

推论 4 系统的能控集和能达集 $S_0, T \subseteq \mathbf{W}$.

容易验证，这里引入的线性子空间 $\mathbf{W}$ 即为 [2] 中以抽象形式所定义的子空间 $\mathbf{v}$, 即 $\mathbf{v} = \mathbf{W}$. 基于子空间 $\mathbf{v}$ ， [2] 以比较烦琐的形式证明了系统能控的必要条件为 $\mathbf{v} = \mathrm{R}^n$. 而据本文的定理 4 ，我们可直接看出，此条件为推论 4 的一个自然的推论.

下面，我们来给出三维单输入双切换系统能控性的充分必要条件. 先来给出几个重要引理.

引理 2 设 A 为 R^3 中的方阵，若向量 B_1, B_2, AB_1 为线性无关，则存在 $h > 0$, 使 $B_1, B_2, \exp(Ah)B_1$ 为线性无关.

证 设 $\exp(Ah) = p_1(h)I + p_2(h)A + p_3(h)A^2$, 则 $\exp(Ah)B_1 = p_1(h)B_1 + p_2(h)AB_1 + p_3(h)A^2B_1$. 由向量 B_1, B_2, AB_1 线性无关，令 $A^2B_1 = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma AB_1$, 则

$$\begin{aligned}&[\ B_1\ \ B_2\ \ \exp(Ah)B_1\ ]\\ &=[\ B_1\ \ B_2\ \ AB_1\ ] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_1(h) + p_3(h)\alpha \\ 0 & 1 & p_3(h)\beta \\ 0 & 0 & p_2(h) + p_3(h)\gamma \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 $p_2(h), p_3(h)$ 不可能同时恒为零，必存在 $h > 0$, 使 $p_2(h) + p_3(h)\gamma \ne 0$, 从而 $B_1, B_2, \exp(Ah)B_1$ 线性无关.

引理 3 设 A 为 R^3 中任意方阵，若向量 B_1, B_2, A^2B_1 为线性无关，则存在 $h_1, h_2 > 0$, 使 $B_1, \exp(Ah_1)B_1, \exp(Ah_2)\exp(Ah_1)B_1$ 为线性无关.

引理 4 设 A_1, A_2 为 R^3 中任意两个方阵， B 为非零向量，且满足：

i) B, A_1B 线性相关；

ii) B, A_2B, A_2^2B 线性相关；

iii) B, A_2B, A_1A_2B 线性无关.

则存在 $h_1, h_2, h_3 > 0$, 使

$$B, \exp(A_2h_3)B, \exp(A_2h_3)\exp(A_1h_2)\exp(A_2h_1)B$$

为线性无关.

引理 3, 4 的证明思路类似于引理 2. 限于篇幅，此略.

定理 7 对（1）所定义的线性切换系统，设 $n = 3, N = 2, p = 1$ 则

$$系统为完全能控 \Leftrightarrow \mathbf{W} = \mathrm{R}^3.$$

证 必要性显然. 现证充分性.

设 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_3 = \mathrm{R}^3$, 根据 $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3$ 维数的不同分布，可分为 4 类情形，见表 1.

表 1 子空间维数分布表

分布 \ 维数	$\dim(\mathbf{W}_1)$	$\dim(\mathbf{W}_2)$	$\dim(\mathbf{W}_3)$
情形 1	3	3	3
情形 2	2	3	3
情形 3	1	3	3
情形 4	1	2	3

情形 1 满足 [2] 中能控性的充分条件，因此系

统为能控.

对于情形 2，空间 $\mathbf{W}_1$ 基的构成有三种可能

i) $\mathbf{W}_1 = \mathrm{span}\{B_1, B_2\}$,

ii) $\mathbf{W}_1 = \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1\}$,

iii) $\mathbf{W}_1 = \mathrm{span}\{B_2, A_2B_2\}$.

其中 ii) 与 iii) 互为对称，只需证 ii).

若 i) 成立，则 $\mathbf{W}_2$ 只可能有四种情况，即

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_2 &= \mathrm{span}\{B_1, B_2, A_2B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, B_2, A_2^2B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, B_2, A_1B_2\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, B_2, A_1^2B_2\}.\end{aligned}$$

不失一般性，设 $\mathbf{W}_2 = \mathrm{span}\{B_1, B_2, A_2B_1\}$, 下证存在切换序列 π, 使 $T(\pi) = \mathbf{W}$.

据引理 2, 取 h_2, 使

$$\mathrm{span}\{B_1, B_2, A_2B_1\} = \mathrm{span}\{B_1, B_2, \exp(A_2h_2)B_1\}.$$

再取充分小 h_3, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, B_2, \exp(A_2h_2)B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, \exp(A_1h_3)B_2, \exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}.\end{aligned}$$

最后任取 h_1，构成切换序列 $\pi: (A_1, h_1)$, (A_2, h_2), (A_1, h_3). 易证

$$\begin{aligned}T(\pi) = \mathrm{span}\{&B_1, \exp(A_1h_3)B_2,\\ &\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}\\ = \mathbf{W}&.\end{aligned}$$

若 ii) 成立，则 $\mathbf{W}_2$ 同样有四种可能，即

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_2 &= \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2^2B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2A_1B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2^2A_1B_1\}.\end{aligned}$$

不失一般性，设 $\mathbf{W}_2 = \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2A_1B_1\}$, 下证存在切换序列 π, 使 $T(\pi) = \mathbf{W}$.

据引理 2, 取 h_2, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, A_2A_1B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, \exp(A_2h_2)A_1B_1\},\end{aligned}$$

再取充分小 h_3, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, \exp(A_2h_2)A_1B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, A_1B_1, \exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)A_1B_1\}.\end{aligned}$$

任取 h_1, 构成切换序列 $\pi: (A_1, h_1), (A_2, h_2), (A_1, h_3)$. 易证

$$\begin{aligned}T(\pi) = \mathrm{span}\{&B_1, A_1B_1,\\ &\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)A_1B_1\}\\ = \mathbf{W}&.\end{aligned}$$

对于情形 3, 不失一般性，设 $\mathbf{W}_1 = \mathrm{span}\{B_1\}$, 则 $\mathbf{W}_2 = \mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_2^2B_1\}$. 下证存在切换序列 π, 使 $T(\pi) = \mathbf{W}$.

据引理 3，取 h_2, h_4, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_2^2B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_2)B_1, \exp(A_2h_4)\exp(A_2h_2)B_1\}.\end{aligned}$$

再取充分小 h_3, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_2)B_1, \exp(A_2h_4)\exp(A_2h_2)B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_2)B_1,\\ &\qquad \exp(A_2h_4)\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}.\end{aligned}$$

任取 h_1, h_5, 构成切换序列 $\pi: (A_1, h_1), (A_2, h_2), (A_1, h_3), (A_2, h_4), (A_1, h_5)$. 易证

$$\begin{aligned}T(\pi) = \mathrm{span}\{&B_1, \exp(A_2h_2)B_1,\\ &\exp(A_2h_4)\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}\\ = \mathbf{W}&.\end{aligned}$$

对于情形 4, 不失一般性，设 $\mathbf{W}_1 = \mathrm{span}\{B_1\}$, 则 $\mathbf{W}_2 = \mathrm{span}\{B_1, A_2B_1\}$. 进一步

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_3 &= \mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_1A_2B_1\},\\ &\text{或 } \mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_1^2A_2B_1\}.\end{aligned}$$

不妨设 $\mathbf{W}_3 = \mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_1A_2B_1\}$, 下证存在切换序列 π, 使 $T(\pi) = \mathbf{W}$.

据引理 4 取 h_2, h_3, h_5 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, A_2B_1, A_1A_2B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_5)B_1,\\ &\qquad \exp(A_2h_5)\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}.\end{aligned}$$

再取充分小 h_4, 使

$$\begin{aligned}&\mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_5)B_1,\\ &\qquad \exp(A_2h_5)\exp(A_1h_3)\exp(A_2h_2)B_1\}\\ &= \mathrm{span}\{B_1, \exp(A_2h_5)\exp(A_2h_4)B_1,\\ &\qquad \exp(A_1h_5)\exp(A_2h_4)\exp(A_1h_3)\\ &\qquad \exp(A_2h_2)B_1\}.\end{aligned}$$

任取 h_1, 构成切换序列 $\pi: (A_1, h_1), (A_2, h_2)$,

$(A_1,h_3),(A_2,h_4),(A_1,h_5)$. 易证

$$\begin{aligned}T(\pi)=\operatorname{span}\{&B_1,\exp(A_2h_5)\exp(A_2h_4)B_1,\\&\exp(A_1h_5)\exp(A_2h_4)\exp(A_1h_3)\\&\cdot\exp(A_2h_2)B_1\}\\=\ &\mathbf{W}.\end{aligned}$$

至此，证明完成.

5 例子

例 1 设

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

矩阵 $[B_1,B_2,A_1B_1,A_2B_1,A_1B_2,A_2B_2,A_1^2B_1,A_2^2B_2]$ 秩为 2, 据 [2] 中命题 3 的充分必要条件，系统为不能控. 但据本文的定理 7, 验证有 $\mathbf{W}=\mathrm{R}^3$, 表明此系统应为能控. 这表明 [2] 中命题 3 的结论的正确性可疑.

事实上，令初始状态为零，取切换序列：$(A_1,h_1),(A_2,h_2),(A_1,h_3),(A_2,h_4),(A_1,h_5)$， 其中 $h_i=1$. 并依次取常值输入 u_i, 则

$$\begin{bmatrix}x_1(5)\\x_2(5)\\x_3(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^4&\mathrm{e}^6\\\mathrm{e}^1&\mathrm{e}^2&\mathrm{e}^3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_3\\u_5\end{bmatrix},$$

即系统完全能控. 由此可见， [2] 中命题 3 的结论是错误的.

6 结论

本文中，我们针对一般的线性切换系统，严格定义了能控性和能达性，并进一步定义了能控集和能达集. 在此基础上，自然的得到了系统完全能控的一个必要条件. 最后，给出了三维单输入双切换系统能控性的充要条件，并通过例子指出 [2] 中的有关结论是错误的. 还有一些问题本文中没有涉及，如能控性和能达性的等价性，能控集和能达集的等价性，一般维数的系统能控性的充要条件等，这些都有待进一步研究.

参考文献

1 Ezzine J, Haddad H H. Controllability and observability of hybrid systems. Int. J. Control, 1989 , 49: 2045 - 2055

2 孙振东，郑大钟. 一类混杂系统的能控性. 中国控制会议论文集，庐山， 1997 ， 699 - 702

3 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 北京：科学出版社，1986